

MedAT SKRIPT

MATHEMATIK



Inhaltsverzeichnis

1	<u>EINLEITUNG</u>	<u>1</u>
2	<u>BASICS MATHEMATIK</u>	<u>2</u>
2.1	ADDITION	2
2.2	SUBTRAHIEREN	3
2.3	MULTIPLIKATION	4
2.4	DIVISION.....	6
2.5	POTENZIEREN UND LOGARITHMIEREN	8
2.5.1	POTENZIEREN	8
2.5.2	LOGARITHMIEREN	9
2.6	RECHENREGELN	10
2.7	IST GLEICH „="“	10
2.8	RUNDEN UND SCHÄTZEN	11
2.9	ZAHLENBEREICHE	11
3	<u>ZEHNERPOTENZEN PRÄFIXE</u>	<u>12</u>
4	<u>EINHEITEN</u>	<u>13</u>
4.1	SI-EINHEITEN	13
4.2	ZEIT	13
4.3	LÄNGEN.....	13
4.4	FLÄCHEN.....	14
4.5	VOLUMEN	14
4.6	UMRECHNUNGEN.....	14
4.6.1	EINDIMENSIONALE EINHEITEN.....	15
4.6.2	MEHRDIMENSIONALE EINHEITEN	15
4.6.3	ZUSAMMENGESETZTE EINDIMENSIONALE EINHEITEN	15
4.6.4	ZUSAMMENGESETZTE MEHRDIMENSIONALE EINHEITEN	15
5	<u>ALGEBRA</u>	<u>16</u>
5.1	SCHLUSSRECHNUNG.....	16
5.1.1	DIREKTER SCHLUSS.....	16
5.1.2	INDIREKTER SCHLUSS	16
5.2	PROZENTRECHNUNG	16
5.3	BRUCHRECHNEN	17
5.3.1	MULTIPLIKATION	17
5.3.2	DIVISION	17
5.3.3	ADDITION/SUBTRAKTION	17
5.4	GLEICHUNGEN/UNGLEICHUNGEN.....	17
5.5	TEXTAUFGABEN	18
5.5.1	GEOMETRISCHE AUFGABEN	18
5.5.2	VERMISCHTE AUFGABEN	18
5.5.3	BEWEGUNGSAUFGABEN	19
5.5.4	LEISTUNGSAUFGABEN	19

6	FUNKTIONEN	21
6.1	GERADENFUNKTION.....	21
6.1.1	BEDEUTUNG DER PARAMETER.....	21
6.2	POTENZFUNKTIONEN.....	22
6.2.1	ALLGEMEINE FORMEL.....	22
6.2.2	ORDNUNG VON FUNKTIONEN	24
6.2.3	QUADRATISCHE FUNKTION	25
6.2.4	KUBISCHE FUNKTIONEN UND DEREN PUNKTE.....	27
6.3	E-FUNKTIONEN	28
6.4	LOGARITHMUS	29
6.5	DIFFERENTIAL.....	30
6.5.1	PUNKTSTEIGUNG UND ABLEITUNG	30
6.5.2	BEDEUTUNG UND ANWENDUNG.....	32
6.6	INTEGRAL	34
6.7	FLÄCHENBERECHNUNG	35
6.8	VOLUMENBERECHNUNG	36
6.9	WINKEL UND WINKELFUNKTIONEN.....	37
6.9.1	WINKEL.....	37
6.9.2	DER EINHEITSKREIS UND DIE WINKELFUNKTIONEN.....	37
7	GEOMETRIE	40
7.1	VIERECKE	40
7.1.1	RECHTECK.....	40
7.1.2	QUADRAT.....	40
7.1.3	PARALLELOGRAMM	40
7.1.4	RAUTE	41
7.1.5	DELTOID.....	41
7.1.6	TRAPEZ	41
7.2	DREIECK.....	42
7.2.1	UNGLEICHSEITIGES DREIECK.....	42
7.2.2	RECHTWINKELIGES DREIECK.....	42
7.2.3	GLEICHSCHENKELIGES DREIECK.....	42
7.3	KREIS	43
7.4	KUGEL.....	43
7.5	ZYLINDER	43
7.6	KEGEL	43
7.7	WÜRFEL	44
7.8	QUADER	44
7.9	PRISMA	44
7.10	PYRAMIDE.....	44
7.11	TETRAEDER.....	45
7.12	HEXAEDER.....	45
8	VEKTORRECHNUNG	46
8.1	BETRAG	46
8.2	WINKEL	46
8.3	EINHEITSVEKTOR.....	46
8.4	NORMALVEKTOR.....	47

8.5	VEKTORADDITION	47
8.6	VEKTORSUBTRAKTION	47
8.7	VEKTORMULTIPLIKATION.....	48
9	<u>QUELLEN- UND BILDVERZEICHNIS.....</u>	51

1 Einleitung

Dieses Skriptum soll eine kostenlose und für alle zugängliche Grundlage für die Vorbereitung zum Basiskonzept Mathematik des MedAT, als Zulassungstest zum Medizinstudium in Österreich, bieten. Es ist als Gemeinschaftsprojekt der Studien- und Maturant_innenberatung der ÖH Med Wien entstanden und kann somit im Schreibstil der einzelnen Teile variieren. Wir haben uns bemüht, uns an der offiziellen Stichwortliste des VMC, sowie an unseren eigenen Erfahrungen zu den einzelnen Themen, zu orientieren und so den Stoff bestmöglich abzudecken.

Trotzdem können wir natürlich keine Garantie für die ausnahmslose Richtigkeit bzw. Deckungsgleichheit mit den beim Aufnahmetest gestellten Fragen übernehmen. Mit diesem Skriptum sollen die Grundlagen nochmals wiederholt werden, was vor allem für jene wichtig ist, bei denen der Aufnahmetest nicht direkt auf den Schulabschluss folgt. Wir wollen durch dieses Skriptum einen groben Überblick über den gefragten Stoff geben, das Grundwissen auf ein einheitliches Niveau bringen und auch verfestigen.

Von diesem Niveau kann dann, je nach Eigeninitiative, aufgebaut werden. Ebenso dient dieses Skriptum der Grundlage für Teile der Physik und Chemie (z.B. pH-Wert).

Wir hoffen euch mit diesem Skriptum bei euren Vorbereitungen helfen zu können und wünschen euch viel Erfolg beim MedAT!

Eure ÖH Med Wien

2 Basics Mathematik

Da beim MedAT keine Taschenrechner erlaubt sind, müssen alle Rechenoperationen im Kopf durchgeführt werden. Das hat wiederum den Vorteil, dass der Schwierigkeitsgrad für Rechnungen sehr beschränkt ist. Es hat sich als ratsam erwiesen, sich mit Grundrechnungsarten nochmals auseinanderzusetzen und Rechnungen per Hand zu wiederholen.

2.1 Addition

Die Addition ist eine der einfachsten Rechnungen in der Mathematik. Es gilt:

$$\text{Summand} + \text{Summand} = \text{Summe}$$

Zahlen dürfen dabei beliebig vertauscht werden.

$$5 + 10 + 9 = 24$$

$$10 + 5 + 9 = 24$$

Das Bilden von großen Summen erfordert einen etwas systematischeren Ansatz. Zuerst werden die Zahlen übereinander geschrieben.

$$\begin{array}{r} 1427 \\ + 3322 \\ \hline \end{array}$$

Nun werden nacheinander beginnend bei der „Einerstelle“ die Zahlen zusammengezählt.

$$\begin{array}{r} 1427 \\ + 3322 \\ \hline 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1427 \\ + 3322 \\ \hline 49 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1427 \\ + 3322 \\ \hline 4749 \end{array}$$

Ebenfalls unterkommen kann einem das Summenzeichen.

$$\sum_{i=m}^n x_i$$

i ist der Startwert (Beispielsweise 5 oder m oder eine andere Zahl) n ist der Endwert (z.B. 10)

$$\sum_{i=5}^{n=10} x_i = 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$$

2.2 Subtrahieren

Das Subtrahieren („Minus rechnen“) von zwei Werten ist schon um etwas komplizierter und hat schon zu vielen Rechenfehlern geführt. Das Ergebnis einer Subtraktion ist der sogenannte Differenzwert.

$$\text{Minuend} - \text{Subtrahend} = \text{Differenz}$$

Vorsicht: Im täglichen Sprachgebrauch versteht man als Differenz eher den „Betrag“. Der Betrag gibt nur den Unterschied zwischen 2 Werten wieder, unabhängig von Minuend und Subtrahend.

Zahlen dürfen ohne Änderung der Rechenart nicht vertauscht werden, denn:

$$5 - 8 \neq 8 - 5$$

Allerdings kann man sich durch Umformen das Leben leichter machen und dadurch die Zahlen vertauschen, um alles zu einer Addition umzuformen (empfiehlt sich bei großen Gleichungssystemen):

$$\begin{aligned} 5 - 8 &= (-3) \\ 5 + (-8) &= (-3) \end{aligned}$$

Eine Ursache für etliche Punktabzüge bei Schularbeiten und Tests ist das Minus vor einer Klammer.

$$\begin{aligned} a - (b + c) &= a - b - c \\ 5 - (3 + 4) &= 5 - 3 - 4 \end{aligned}$$

Die Subtraktion von großen Zahlen verläuft ähnlich wie die Addition, nur dass diesmal nicht getauscht werden darf und der Minuend oben stehen muss!

$$\begin{array}{r} 33784 - 8975 = ? \\ 33784 \\ - \quad 8975 \\ \hline \end{array}$$

Nun zieht man die untere Zahl von der oberen ab, ist dies nicht möglich so muss man um 10 erweitern. Daher anstelle von 4 -5 ist es 14 -5 und 9 die erste Zahl. Dies muss jedoch bei der nächsten Ziffer beachtet werden.

$$\begin{array}{r} 33784 \\ - \quad 8975 \\ \hline 9 \end{array}$$

Die Berücksichtigung erfolgt nun bei der Subtraktion von $8 - (7 + 1) = 0$

$$\begin{array}{r} 33784 \\ - \quad 8975 \\ \hline 09 \end{array}$$

Dies führt man weiter bis zum Endergebnis:

$$\begin{array}{r} 33785 \\ - \quad 8975 \\ \hline 24809 \end{array}$$

Der Umgang mit negativen Zahlen sollte gut sitzen. Zieht man von einer positiven Zahl eine größere positive Zahl ab, so muss das Ergebnis eine negative Zahl sein.

$$8 - 14 = -6$$

Zieht man von einer negativen Zahl eine positive Zahl ab, so wird das Ergebnis „negativer“.

$$(-8) - 14 = -22$$

Selbiges passiert natürlich, wenn man zwei negative Zahlen addiert (siehe oben die Umwandlung in Additionen).

$$(-8) + (-14) = -22$$

Werden allerdings zwei negative Zahlen voneinander subtrahiert, so wird das Ergebnis positiver.

$$(-8) - (-14) = (-8) + 14 = 6$$

2.3 Multiplikation

Die Multiplikation fasst mehrere Additionen zusammen.

$$5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5 \times 1$$

Es gilt:

$$\mathbf{Faktor \times Faktor = Produkt}$$

Anwesende Klammern können, wenn nur Multiplikationen vorhanden sind, ignoriert werden.

$$(a \times b) \times c = a \times b \times c$$

Ein wichtiger Teil bei der Multiplikation ist das „Herausheben“ und das „Hineinmultiplizieren“, welches doch sehr oft vorkommt.

$$a \times c + a \times d = (c + d) \times a$$

$$5 \times 2 + 5 \times 3 = (3 + 2) \times 5 = 25$$

Für die meisten von uns ist die Multiplikation von Dezimalzahlen schriftlich eine Aufgabe, welche es wieder zu lernen gilt. Sie ist in Papierform schwer zu erklären und man eignet sie sich am besten auf YouTube an. Dennoch hier ein Beispiel!

$$\underline{25,43 \times 19,67}$$

Wichtig beim Multiplizieren ist, denselben Abstand bei den Zahlen einzuhalten, sodass alle Zahlen schön untereinanderstehen können. Wir beginnen mit der hintersten Zahl und ignorieren die Kommasetzung erstmal. Es gilt, 2543 mal 7. Der Beginn muss exakt unter der 7 sein.

$$\begin{array}{r} 25,43 \times 19,67 \\ \hline 17801 \end{array}$$

Zur Erinnerung:

$$7 \times 3 = 21 \text{ (merke 2, schreibe 1)}$$

$$7 \times 4 = 28 + 2 = 30 \text{ (merke 3, schreibe 0)}$$

$$7 \times 5 = 35 + 3 = 38 \text{ (merke 3, schreibe 8)}$$

$$7 \times 2 = 14 + 3 = 17 \text{ (schreibe 17)}$$

➤ 17801

Es wird mit der 6 weitergemacht, diesmal muss der Beginn der Zahl exakt unter der 6 sein!

$$\begin{array}{r} 25,43 \times 19,67 \\ \hline 17801 \\ 15258 \end{array}$$

Weiter geht's mit der 9:

$$\begin{array}{r} 25,43 \times 19,67 \\ \hline 17801 \\ 15258 \\ 22887 \end{array}$$

Die letzte Zahl ist die 1:

$$\begin{array}{r} 25,43 \times 19,67 \\ \hline 17801 \\ 15258 \\ 22887 \\ 2543 \end{array}$$

Nun werden alle Zahlen, welche wir bis jetzt ausmultipliziert haben, miteinander addiert.

$$\begin{array}{r} 25,43 \times 19,67 \\ \hline 17801 \\ 15258 \\ 22887 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2543 \\ \hline 5002081 \end{array}$$

Als letzten Schritt müssen wir das Komma setzen. Dies tun wir, indem wir oben abzählen, wie viele Stellen generell hinter einem Komma stehen. Das sind in unserem Beispiel insgesamt vier. Nun gehen wir in unserem Ergebnis die Stellen von hinten nach vorne durch und setzen das Komma nach der 4ten Stelle:

$$\begin{array}{r} 25,43 \times 19,67 \\ \hline 17801 \\ 15258 \\ 22887 \\ 2543 \\ \hline 500,2081 \end{array}$$

Aus der Multiplikation von negativen Zahlen stammt der legendäre Satz „Minus mal Minus ist Plus“ welcher an folgendem Beispiel nachzuempfinden ist:

$$\begin{aligned} -b \times -c &= cb \\ -6 \times -2 &= 12 \end{aligned}$$

Wenn zwei Zahlen miteinander multipliziert werden, kann es vorkommen, dass das Mal-Zeichen einfach weggelassen wird, daher gilt:

$$3 \times b = 3b$$

2.4 Division

Stellt die Umkehroperation zum Multiplizieren dar und kann als „aufteilen“ verstanden werden, z.B. 12 Äpfel auf 3 Leute aufgeteilt sind 4 Äpfel pro Person.

$$\text{Dividend} : \text{Divisor} = \text{Quotient}$$

Der Dividend wird auch oft als "Zähler" und der Divisor als "Nenner" bezeichnet. Da Bruchrechnen ein eigenes Kapitel im Bereich Algebra ist, wird dieses hier nicht weiter erwähnt. Eine wichtige Fähigkeit ist das Dividieren mit der Hand, welches wir auch gleich üben werden.

$$145,6 : 13,2 =$$

Wenn der Divisor eine Dezimalzahl ist, so empfiehlt es sich das Komma vorerst zu ignorieren, die Frage lautet „Welchen Teil von 145,6 muss ich nehmen damit sich 132 ausgeht?“ -> Die 145.

Nun ist die Frage: „Mit was muss 132 multiplizieren werden um der 145 nahe zu kommen?“ Logischerweise mit 1. Es wird anschließend diejenige Zahl exakt unter den Beginn des Dividenden geschrieben.

$$\begin{array}{r} 145,6 : 13,2 = 1 \\ 132 \end{array}$$

Es wird nun die 132 von der 145 abgezogen und der Restbetrag daruntergeschrieben.

$$\begin{array}{r} 145,6 : 13,2 = 1 \\ \underline{132} \\ 13 \end{array}$$

Die nächste Zahl wird „heruntergezogen“.

$$\begin{array}{r} 145,6 : 13,2 = 1 \\ \underline{132} \\ 136 \end{array}$$

Dasselbe Spiel beginnt von vorne, nur mit dem Zusatz, dass diesmal die erste Aktion beim Komma der 145,6 gesetzt wird, daher muss nach der nächsten Zahl im Quotienten ein Komma gesetzt werden.

$$\begin{array}{r} 145,6 : 13,2 = 11, \\ \underline{132} \\ 136 \\ 132 \end{array}$$

Dies wird solange fortgesetzt, bis der notwendige Grad an Genauigkeit erreicht wurde, oder kein Rest mehr vorhanden ist.

$$\begin{array}{r} 145,6 : 13,2 = 11,03 \\ \underline{132} \\ 136 \\ \underline{132} \\ 400 \\ \underline{396} \\ 4R \end{array}$$

Die Division kann umgewandelt werden in eine Multiplikation, indem man den Kehrwert des Divisors bildet.

$$a : b = a \times \frac{1}{b} = a \times b^{-1}$$

Auf den letzten Ausdruck mit der Potenz kommen wir bei „Potenzieren und Logarithmieren“ noch einmal zu sprechen.

Wenn im Dividend eine Summe oder eine Differenz enthalten ist, darf nicht gekürzt werden und es darf beim Kürzen auch nicht auf einen Teil bezogen werden! Denn:

$$\frac{a+b}{c} \neq \frac{a}{c} + b \quad \text{ebenso} \quad \frac{3+6}{18+6} \neq \frac{1+1}{18 \times 1}$$

Sehr wohl sind das Aufteilen und Kürzen durch Herausheben erlaubt.

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} \quad \text{ebenso} \quad \frac{3+6}{18+6} = \frac{3 \times (1+2)}{3 \times (6+2)} = \frac{1+2}{6+2}$$

Die Division durch Null ist undefiniert und führt zu keinem Ergebnis. (Genau genommen gäbe es drei Varianten: $-\infty$, $+\infty$ und 0. Da jedoch nicht gesagt werden kann, welche dieser drei im speziellen Fall zutrifft, gilt die Division durch 0 als undefiniert).

$$\frac{5}{0} = \text{undef.} \quad \text{aber} \quad \frac{0}{5} = 0$$

Man kann also sehr wohl 0 durch eine andere Zahl teilen, das Ergebnis ist natürlich wieder Null, dieses Phänomen jedoch kann man sich beim Formeln-Umwandeln zunutze machen.

$$\begin{aligned} 0 &= 3x^2 + 3x + 3 \quad |(:3) \\ &= x^2 + x + 1 \end{aligned}$$

2.5 Potenzieren und Logarithmieren

2.5.1 Potenzieren

Additionen können mit Hilfe von Multiplikationen abgekürzt werden. Um Multiplikationen abzukürzen verwendet man Potenzen. Die „Hochzahl“ bezeichnet man als Exponenten und die Zahl, um welche es ursprünglich geht, als Basis.

$$\begin{aligned} \text{Basis}^{\text{Exponent}} &= \text{Potenz } a \times a \times a = a^3 \\ 10 \times 10 \times 10 &= 10^3 \end{aligned}$$

Wenn der Exponent negativ ist, so handelt es sich um den Kehrwert der Potenz mit positivem Vorzeichen.

$$\begin{aligned} 10^{-3} &= \frac{1}{10^3} \\ x^{-2} &= \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

Jede Potenz mit dem Exponenten 0 ist 1!

$$\begin{aligned} x^0 &= 1 \\ 2^0 &= 1 \\ 10^0 &= 1 \\ p^{5-\frac{6}{30}} &= 1 \end{aligned}$$

Des Weiteren muss man leider ein paar Rechengesetze betrachten.

Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis: Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem ihre Exponenten addiert werden.

$$\begin{aligned} a^m \times a^n &= a^{m+n} \\ 10^2 \times 10^3 &= 10^5 \end{aligned}$$

Multiplikation von Potenzen mit gleichem Exponenten: Potenzen mit gleichem Exponenten werden multipliziert, indem die Basen multipliziert werden.

$$\begin{aligned} a^n \times b^n &= (ab)^n \\ 10^3 \times 5^3 &= 50^3 \end{aligned}$$

Division von Potenzen mit gleicher Basis.

$$a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$$

$$10^{3-2} = \frac{10^3}{10^2}$$

Potenzierung von Potenzen: Potenzen werden potenziert, indem alle Exponenten miteinander multipliziert werden.

$$(a^m)^n = a^{m \times n}$$

$$(10^2)^3 = 10^6$$

Die letzte Regel verdient besondere Bedeutung, denn Wurzeln können auch in Form von Potenzen angeschrieben werden. Generell gilt:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$a^{\frac{4}{2}} = \sqrt[2]{a^4}$$

2.5.2 Logarithmieren

Hierbei wird nach dem Exponenten gefragt. Dafür muss man jedoch die Entscheidung treffen, auf welche Basis man das bezieht.

Wir haben die Zahl 16 und fragen uns, 2 hoch wieviel ist 16?

$$2^? = 16$$

Um dies zu lösen, verwenden wir einen Logarithmus der Basis 2 auf 16:

$$\log_2(16) = 4$$

$$2^4 = 16$$

Es gibt unendlich viele Logarithmen, da man die Basis frei variieren kann. Zwei finden jedoch eine besonders hohe Bedeutung: der natürliche Logarithmus mit der Euler'schen Zahl (2,718) als Basis, sowie der dekadische Logarithmus mit der Zahl 10 als Basis. Sehr oft verwendet man „log“ für den dekadischen und „ln“ für den natürlichen Logarithmus. Ich bin schon öfters von Nachhilfeschülern gefragt worden, wofür man überhaupt in einem normalen Leben das Logarithmieren benötigt -> pH-Wert oder die Richterskala bei Erdbeben. Es ist vernünftig zu wissen, dass eine Veränderung des pH-Wertes um 1 eine Veränderung um den Faktor 10 bedeutet (dek.log). Als Mediziner benötigt man den Logarithmus spätestens beim Berechnen von Biologischen Abbauraten (Exponentielle Abnahmen). Es gibt wieder einige Rechenregeln zu beachten. Wenn man genau hinsieht, merkt man, dass diese den Regeln des Potenzierens etwas ähneln:

$$\log(u) + \log(v) = \log(u \times v)$$

$$\log(10) + \log(100) = \log(1000)$$

$$1 + 2 = 3$$

$$\log(u) - \log(v) = \log\left(\frac{u}{v}\right)$$

$$\log(10) - \log(100) = \log\left(\frac{10}{100}\right)$$

$$1 - 2 = -1$$

$$a^{\log_a x} = x$$

$$10^{\log(15)} = 15$$

Es gibt zwei Regeln, welchen ich hier besondere Bedeutung einräumen möchte, denn sie werden irrsinnig oft beim Umwandeln von Exponentialfunktionen angewandt:

$$\log(u^k) = k \times \log(u)$$

$$\log(5^3) = 3 \times \log(5)$$

$$\log_u u = 1$$

$$\log(10) = 1$$

$$\ln(e) = 1$$

Beispiel: Halbwertszeit-Berechnung, nicht vergessen:

$$N\left(t_{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2} \times N_0$$

„Nach der Halbwertszeit ist nur noch die Hälfte von der Ausgangsmenge vorhanden“.

2.6 Rechenregeln

Punkt vor Strich, die Klammer sagt: „Zuerst komm ich!“.

Die höchste Priorität genießen die Punktrechnungen, das sind Multiplikationen, Divisionen, Potenzen und Wurzeln (da sich die Wurzeln und Potenzen vom Multiplizieren ableiten).

$$2 + 5 \times 6 - 4 : 2 + 3^2 = 39$$

$$2 + 30 - 2 + 9 = 39$$

2.7 Ist gleich „=“

Das Gleichheitszeichen hat in der Mathematik eine hohe Bedeutung. Es sagt aus, dass die Termini (alias logische mathematische Aussagen) auf beiden Seiten gleich sind, daher dasselbe Ergebnis haben. Man kann sich dies vorstellen wie eine Waage, auf welcher zwei gleich große Gewichte ruhen. Allerdings in unterschiedlicher Form (links Getreide, rechts Fleisch). Wie auch bei einer Waage bleibt die Gleichung ausgeglichen, solange links und rechts genau die gleiche Menge an Gewicht hinzugefügt wird.

Man darf alles, solange man links und rechts exakt dasselbe einrechnet und die Rechenregeln genau befolgt! Sehen wir uns das in einem Beispiel an, wo wir links sofort das Ergebnis hinschreiben werden und rechts alles als Term anschreiben.

$$\begin{aligned}
 5 &= 5 \quad | + 2 \\
 7 &= 5 + 2 \quad | - 10 \\
 -3 &= 5 + 2 - 10 \quad | \times 4 \\
 -12 &= 4 \times (5 + 2 - 10) \quad | : -3 \\
 4 &= \frac{4 \times (5 + 2 - 10)}{-3}
 \end{aligned}$$

Beim MedAT werden normalerweise keine großen Formeln zum Umformen oder Auflösen gegeben, jedoch sollten dennoch die Grundzüge gut sitzen.

2.8 Runden und schätzen

Häufig ist es nicht wichtig, wenn man vier Antwortmöglichkeiten gegeben hat, genau die richtige Zahl auszurechnen. Hierbei empfiehlt es sich nachzusehen, wie genau die Antworten gegeben sind und dann genau so weit zu rechnen.

$$\begin{aligned}
 145,6 : 13,2 &= 11,03 \\
 146 : 13 &\approx 11
 \end{aligned}$$

Nicht vergessen, alle Zahlen ab 5 werden aufgerundet, unter 5 wird abgerundet.

2.9 Zahlenbereiche

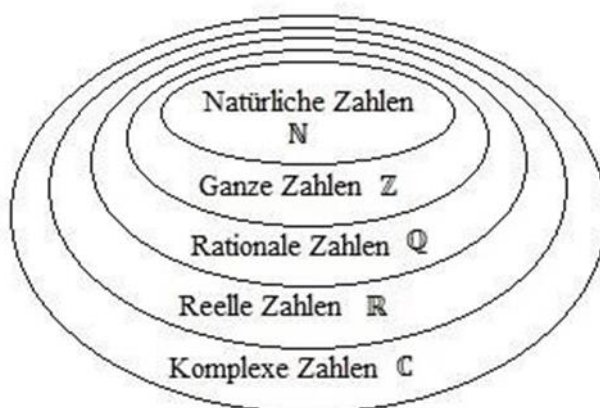
Natürliche Zahlen: 0, 1, 2, 3, ...

Ganze Zahlen: ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...

Rationale Zahlen: Ganze Zahlen und Brüche

Reelle Zahlen: Brüche und irrationale Zahlen (z.B. Wurzel aus 2)

Komplexe Zahlen: Reelle Zahlen und Komplexe Zahlen



Die meisten Operationen finden im Bereich der Reellen Zahlen statt.

3 Zehnerpotenzen Präfixe

Präfix	Kurzzeichen	Potenz	Faktor
Exa	E	10^{18}	1 000 000 000 000 000 000
Peta	P	10^{15}	1 000 000 000 000 000
Tera	T	10^{12}	1 000 000 000 000
Giga	G	10^9	1 000 000 000
Mega	M	10^6	1 000 000
Kilo	k	10^3	1 000
Hekto	h	10^2	100
Deka	da	10^1	10
Dezi	d	10^{-1}	0,1
Zenti	c	10^{-2}	0,01
Milli	m	10^{-3}	0,001
Mikro	μ	10^{-6}	0,000 001
Nano	n	10^{-9}	0,000 000 001
Pico	p	10^{-12}	0,000 000 000 001
Femto	f	10^{-15}	0,000 000 000 000 001
Atto	a	10^{-18}	0,000 000 000 000 000 001

4 Einheiten

4.1 SI-Einheiten

Physik. Größe	Symbol (der Größe)	Basiseinheit	Symbol (der Einheit)
Masse	m	Kilogramm	kg
Strecke	s, l, d...	Meter	m
Zeit	t	Sekunde	s
Stromstärke	I	Ampere	A
Temperatur	T	Kelvin	K
Stoffmenge	n	Mol	<u>mol</u>
Lichtstärke	I _v	Candela	<u>cd</u>

4.2 Zeit

	Tag	
:24		×24
v	Stunde	^
×60		×60
v	Minute	^
×60		×60
	Sekunde	

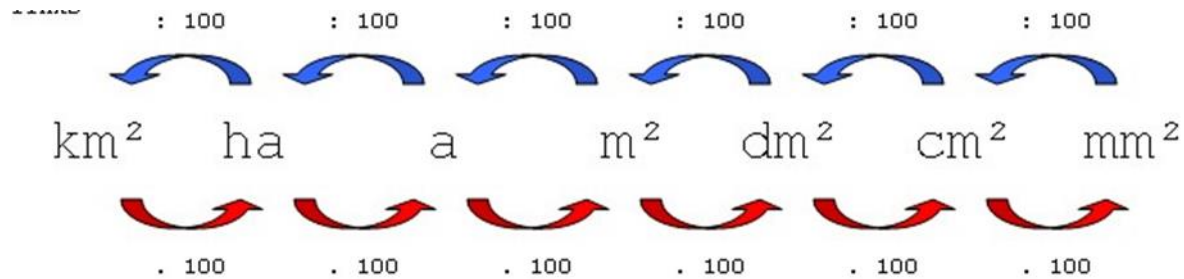
Ab der Sekunde verhält es sich nach SI konstant.

4.3 Längen

Da Längen eindimensional sind, steigen und fallen sie ganz „normal“, ohne dass etwas berücksichtigt werden muss.

4.4 Flächen

Flächen sind zweidimensional, das bedeutet, die Standardeinheit ergibt sich aus $m \cdot m$ oder m^2 . Daher muss bei einem Umwandschritt von dm^2 auf m^2 nicht mit 10 sondern mit 10^2 multipliziert und umgekehrt werden.



Anmerkung: Die Bezeichnung "Dekameter" konnte sich nicht durchsetzen, stattdessen verwendet man „a“ für „Are“ (vorrangig in der Schweiz). Hektometer ist eine übliche Bezeichnung, bekannt von dem in der Landwirtschaft verwendeten „Hektar“.

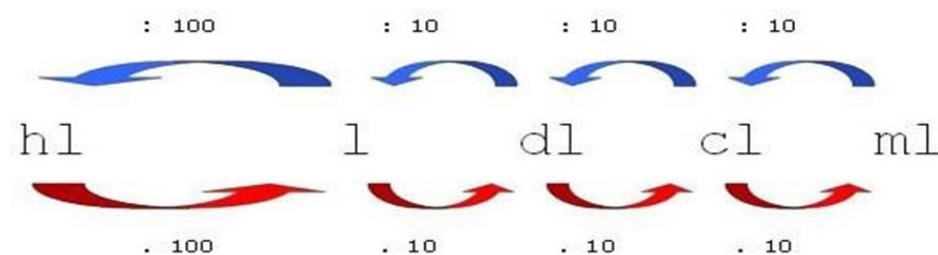
4.5 Volumen

Volumina sind dreidimensional, es ergibt sich ihre Einheit aus $m \cdot m \cdot m$ oder m^3 . Um von dm^3 auf m^3 zu kommen, darf nicht mit 10 sondern muss mit $10 \cdot 10 \cdot 10$ oder 10^3 multipliziert werden.

Im üblichen Sprachgebrauch hat sich jedoch statt Kubikmeter (m^3) Liter (L) etabliert.

Merke:

$$1dm^3 = 1L \text{ und } 1cm^3 = 1ml$$



4.6 Umrechnungen

Fast jedes Jahr werden im Mathematik-Teil des MedAT mindestens 1-2 Fragen zum Thema „Einheiten umwandeln“ gestellt.

Wichtig:

$$10^{-2} = \frac{1}{10^2}$$

Es ist ratsam, immer mit Gleitkomma-Darstellung zu arbeiten. Durch eine Zahl zu dividieren ist dasselbe, wie mit dem Kehrwert zu multiplizieren!

4.6.1 Eindimensionale Einheiten

$$400\mu m = ? km$$

Von μ (mikro) auf k (kilo) sind es 9 Stellen, die Einheit wird größer, daher muss die Zahl kleiner werden. Es wird daher durch 109 dividiert.

$$\frac{4 \times 10^2}{10^9} = 4 \times 10^{-7} km$$

4.6.2 Mehrdimensionale Einheiten

$$2000ml = ? hm^3$$

1 ml = 1cm³, von centi auf hekto sind es 4 Stellen, die Einheit ist dreidimensional und wird größer, daher muss durch 1012 dividiert werden.

$$\frac{2 \times 10^3}{10^{12}} = 2 \times 10^{-9} hm^3$$

4.6.3 Zusammengesetzte Eindimensionale Einheiten

$$1 \frac{mmol}{s} = ? \frac{mol}{h}$$

Von **Milli** auf **SI-Standard** sind es 3 Stellen, die Einheit wird größer, daher muss durch 10³ dividiert werden. Von Sekunden auf Stunden liegt die Zahl 3600 dazwischen, die Einheit wird größer daher muss durch 3600 dividiert werden. Der Bruchstrich dazwischen verschwindet jedoch nicht!

$$1 \times \frac{10^{-3}}{3600^{-1}} = 10^{-3} \times 3,6 \times 10^3 = 3,6 \frac{mol}{h}$$

4.6.4 Zusammengesetzte Mehrdimensionale Einheiten

$$20 \frac{m}{s^2} = ? \frac{km}{h^2}$$

Von Meter auf Kilometer sind es 3 Stellen, die Einheit wird größer, daher muss durch 103 dividiert werden. Von Sekunden auf Stunden liegt die Zahl 60² dazwischen, die Einheit wird größer und ist zweidimensional, es muss daher mit 604 dividiert werden. (60²)².

$$\begin{aligned} 20 \times \frac{10^{-3}}{60^{-4}} &= 20 \times 10^{-3} \times 60^4 = 2 \times 3600 \times 3600 \times 10^{-2} = 2 \times 3,6 \times 3,6 \times 10^4 \\ &= 25,92 \times 10^4 km \end{aligned}$$

5 Algebra

5.1 Schlussrechnung

Vor allem in der Chemie lassen sich gut 90% der alltäglichen Problemstellungen mit Schlussrechnungen beheben.

5.1.1 Direkter Schluss

Beim direkten Schluss verhalten sich die zwei Werte zueinander direkt proportional. Das bedeutet, der eine Wert nimmt immer mit dem anderen zu. 1 Wassermelone kostet 2,99€ wie viel kosten 5 Wassermelonen?

Beim direkten Schluss wird diagonal multipliziert und horizontal dividiert.

5.1.2 Indirekter Schluss

Beim indirekten Schluss verhalten sich die 2 Parameter zueinander indirekt proportional. Das bedeutet, der eine Wert nimmt zu, während der andere abnimmt. Indirekte Schlüsse kommen seltener vor.

Ein Handwerker benötigt für eine Aufgabe 7 Tage, wie lange benötigen 3 Handwerker für die gleiche Aufgabe, wenn sie alle dieselbe Leistung haben?

Beim indirekten Schluss wird horizontal multipliziert und diagonal dividiert.

5.2 Prozentrechnung

Nach wie vor ist mir schleierhaft, wieso zum Thema Prozentrechnungen so viele verschiedene Formeln existieren. Dabei ist es ganz simpel: Prozent ist als Anteil von 100 zu sehen und Promille als Anteil von 1000.

$$W = \frac{p \times G}{100}$$

$p = \text{Prozentzahl}$
 $G = \text{Grundwert}$
 $W = \text{Potenzwert}$

Die gleiche Formel ist für Promille anzuwenden: jedoch wird mit 1000, anstelle von 100 gerechnet.

In einem Bus haben 45 Personen Platz, der Bus ist zu 80% ausgelastet, wie viele Personen sitzen im Bus?

$$\frac{45 \times 80}{100} = 36$$

Ein Patient soll 35mg eines Medikamentes erhalten, wie viel muss man ihm verabreichen, damit der Patient zu 90% mit dem Medikament gesättigt ist, und er schon 15mg bekommen hat?

$$\frac{35 \times 90}{100} = 31,5$$

$$31,5 - 15 = 16,5mg$$

5.3 Bruchrechnen

$$\frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}} = \text{Quotient}$$

5.3.1 Multiplikation

Zwei Brüche werden miteinander multipliziert, indem jeweils Zähler und Nenner miteinander multipliziert werden.

$$\frac{2}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{2 \times 3}{4 \times 2} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

5.3.2 Division

Zwei Brüche werden dividiert, indem man mit ihrem Kehrwert multipliziert.

$$\frac{2}{4} : \frac{3}{2} = \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{2 \times 2}{4 \times 3} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

5.3.3 Addition/Subtraktion

Bei einer Addition oder Subtraktion muss der Nenner auf dieselbe Größe gebracht werden, dies kann durch Erweiterung passieren.

5.4 Gleichungen/Ungleichungen

Wie Gleichungen funktionieren wurde bereits im Kapitel „Ist gleich“ erörtert. Meistens sucht man nach einer Variablen. Häufig kommt es vor, dass man ein Gleichungssystem vorliegen hat und man die einzelnen Variablen substituieren muss.

Bsp.:

In einem Dreieck gilt: Die Seite a ist ein Viertel der Seite b und die Seite c ist um 8cm kürzer als die Seite b. Der Umfang beträgt 19cm. Wie lang sind die Seiten?

Aus logischer Überlegung heraus ergibt sich die Formel für den Umfang (wenn man alle Seiten zusammenzählt...)

$$U = a + b + c$$

Die Seite a ist ein Viertel b.

$$a = \frac{b}{4}$$

Die Seite c ist um 8cm kürzer als die Seite b.

$$\begin{aligned}\frac{b}{4} + b + b - 8 &= 19 \quad | + 8 \\ 2,25b &= 27 \quad | : 2,25 \\ b &= 12\end{aligned}$$

Nun muss man alle Informationen zusammenfügen.

$$\begin{aligned}b &= 12 \\ \frac{b}{4} &= a = 3 \\ b - 8 &= c = 4\end{aligned}$$

Ungleichungen funktionieren analog, nur muss bei einer Multiplikation mit -1 die Richtung des Zeichens geändert werden!

$$\begin{aligned}3x + 2 &< 15y \quad | \times (-1) \\ -3x - 2 &> -15y\end{aligned}$$

5.5 Textaufgaben

Meistens in Form von 1-2 Fragen beim MedAT vorhanden. Hier werden die großen Prinzipien der meisten Textaufgaben vorgestellt. Es lohnt sich jedoch auf jeden Fall, das Kapitel Textaufgaben im Buch der ersten Oberstufe noch einmal durchzuarbeiten.

5.5.1 Geometrische Aufgaben

Wie verändert sich das Volumen einer Kugel, wenn der Radius verdoppelt wird? (Formeln hierfür sind im Kapitel „Geometrie“ zu finden).

$$V = \frac{4}{3}\pi \times r^3$$

Wird der Radius verdoppelt so:

$$V = \frac{4}{3}\pi \times (2r)^3 = \frac{4}{3}\pi \times 8 \times r^3$$

Daher steigt das Volumen um den Faktor 8.

5.5.2 Vermischte Aufgaben

In verschiedenen Gruppen von Schülern ist x die Anzahl der Burschen und y die Anzahl der Mädchen. Modellieren Sie eine Gleichung aus folgender Information: „Wäre ein Mädchen weniger, so wären dreimal so viele Burschen wie Mädchen in einer Gruppe.“
„Dreimal so viele Burschen wie Mädchen“

$$3y = x$$

„Wenn ein Mädchen weniger wäre“

$$3(y - 1) = x$$

5.5.3 Bewegungsaufgaben

Vom Bahnhof A fährt um 12.30 Uhr ein Tankzug ab, seine mittlere Geschwindigkeit beträgt 30km/h. Nachdem er eine Strecke von 3km zurückgelegt hat, durchfährt ein Regionalexpress mit einer mittleren Geschwindigkeit von 90km/h den Bahnhof A in der gleichen Richtung. Wann passiert der Regionalexpress den Bahnhof A?

Die Frage lautet, wann passiert der Zug den Bahnhof A? Aus dem Text lässt sich logisch ableiten, dass er dies dann tut, wenn der Tankzug die Strecke von 3km zurückgelegt hat. Der Tankzug hat eine Geschwindigkeit von 30km/h und legt 3km in welcher Zeit zurück?

$$v = \frac{s}{t}$$

$$30 = \frac{3}{x}$$

$$x = \frac{3}{30} = 0,1h = 6 \text{ Min}$$

Daher muss dies um 12.36 passieren. Die Basis für Bewegungsaufgaben ist immer $v = s/t$.

5.5.4 Leistungsaufgaben

Die Leistung ist definiert als $P = W/t$. Die „Arbeit“ als W ist jedoch gerade bei diesen Aufgaben immer ein bisschen anders definiert. Sehen wir uns das anhand eines Beispiels an: Um einen Löschteich eines Sägewerks leer zu pumpen, kommen 3 Pumpen zum Einsatz. Die erste könnte die Arbeit alleine in 4 Stunden bewältigen, die zweite in 3 Stunden und die dritte in 5 Stunden. Wie lange würden sie zu dritt benötigen? (Wir formen um auf W , was in diesem Fall das Volumen des Löschteichs ist.)

$$P_1 \times t + P_2 \times t + P_3 \times t = V$$

Nun setzen wir die Einzelleistungen ein:

$$\frac{V}{4} \times t + \frac{V}{3} \times t + \frac{V}{5} \times t = V \quad | : V$$

$$\frac{t}{4} + \frac{t}{3} + \frac{t}{5} = 1$$

$$\frac{15t + 20t + 12t}{60} = 1 \quad | \times 60$$

$$47t = 60 \quad | : 47$$

$$t = 1,3h \quad (1,2766)$$

Der Gedanke bei Leistungsaufgaben ist, dass im Text meistens Einzelleistungen angegeben sind (z.B. Eine Pumpe schafft alles in 4 Stunden), welche natürlich gemeinsam addiert und dann mit der Zeit multipliziert die eigentliche Arbeit ergeben.

$$(P_1 + P_2 + P_3) \times t = W$$

Daraus ergeben sich die Einzelleistungen der Pumpen.

Pumpe 1: $W/4$

Pumpe 2: $W/3$

Pumpe 3: $W/5$

Diese setzt man nun ein, dividiert durch die Arbeit und erhält nun eine Gleichung, welche die Zeit liefert.

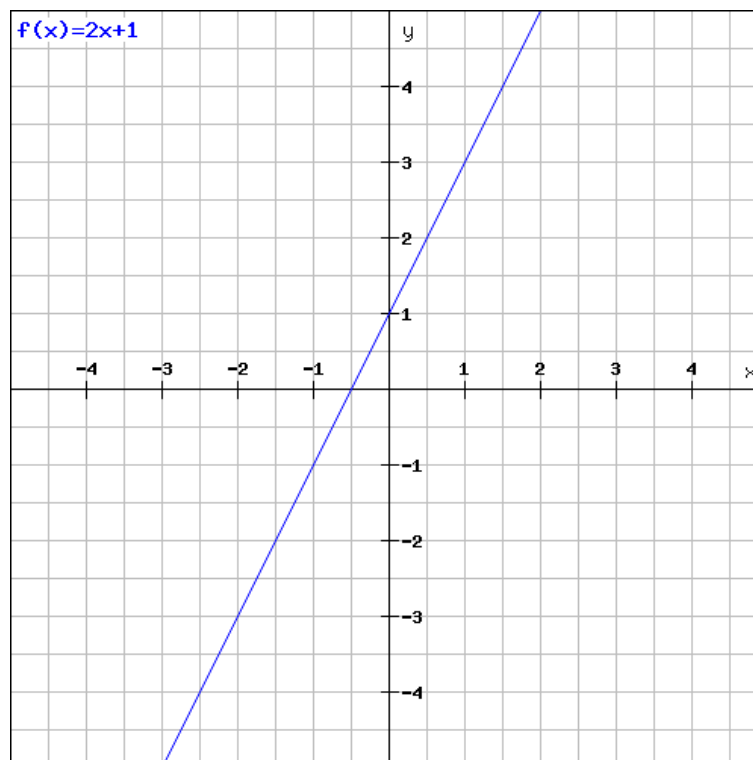
6 Funktionen

Die Funktionen beim MedAT zeichnen sich vor allem dadurch aus, dass sie anhand einer Grafik erkannt werden müssen.

6.1 Geradenfunktion

Eine normale lineare Funktion hat die allgemeine Formel:

$$f(x) = y = k \times x + d$$



6.1.1 Bedeutung der Parameter

Zu allererst sei gesagt, dass Funktionen sogenannte eindeutige Zuordnungen sind. Das heißt, jedem X-Wert ist ein Y-Wert zugeordnet. Wie die beiden miteinander zusammenhängen, wird durch die Funktion selbst ausgedrückt.

Achsenabschnitt d:

Drückt den Punkt aus, an welchem der Graph die y-Achse schneidet. An diesem Punkt ist $x=0$ demnach von k unabhängig!

Steigung k:

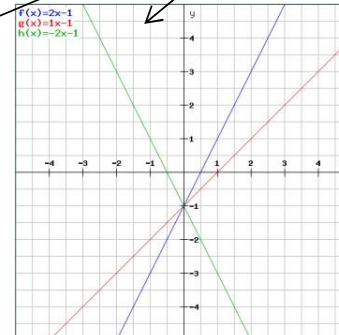
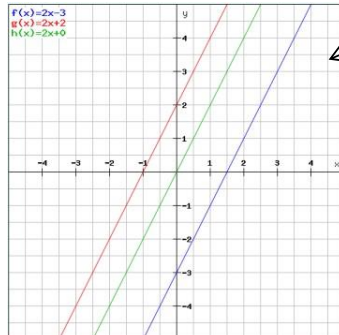
Beschreibt die relative Änderung des y-Wertes bezogen auf die relative Änderung des x-Wertes.

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = k$$

Beispiel: $P_1(1|1), P_2(2,5|4)$

In die Formel einsetzen: $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 1}{2,5 - 1} = \frac{3}{1,5} = 2 = k$

k, d und ihre Auswirkungen



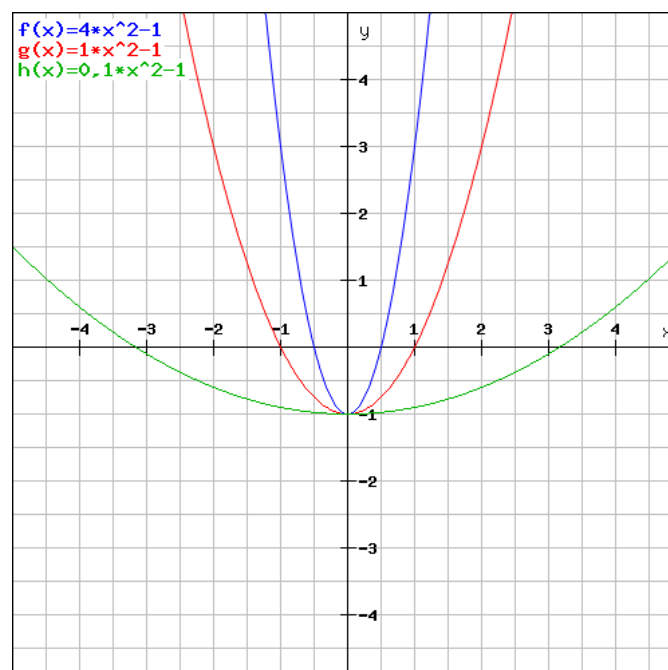
6.2 Potenzfunktionen

Sind Funktionen, welche x als Basis einer Potenz besitzen, der Exponent ist dabei konstant.

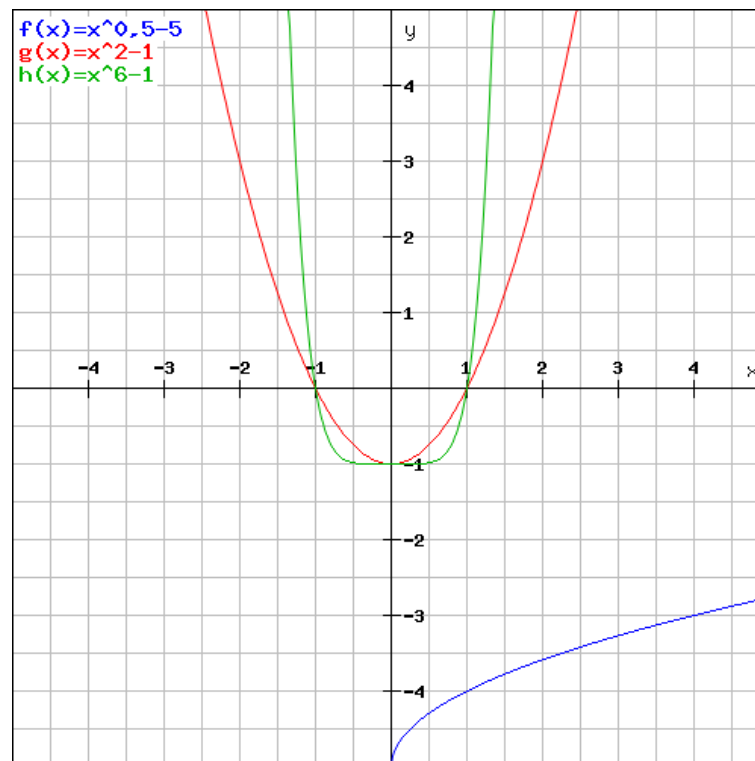
6.2.1 Allgemeine Formel

$$f(x) = a \times x^r + c$$

a beschreibt diesmal, wie „breit“ der Graph ist. c ist der konstante Wert, welcher über den Schnittpunkt mit der y -Achse entscheidet (so wie bei linearen Funktionen). Diese Grafik zeigt, wie sich die Graphen auffächern, wenn a erhöht oder erniedrigt wird.



Weitaus interessanter ist die folgende Grafik. Zuerst zur blauen Funktion.

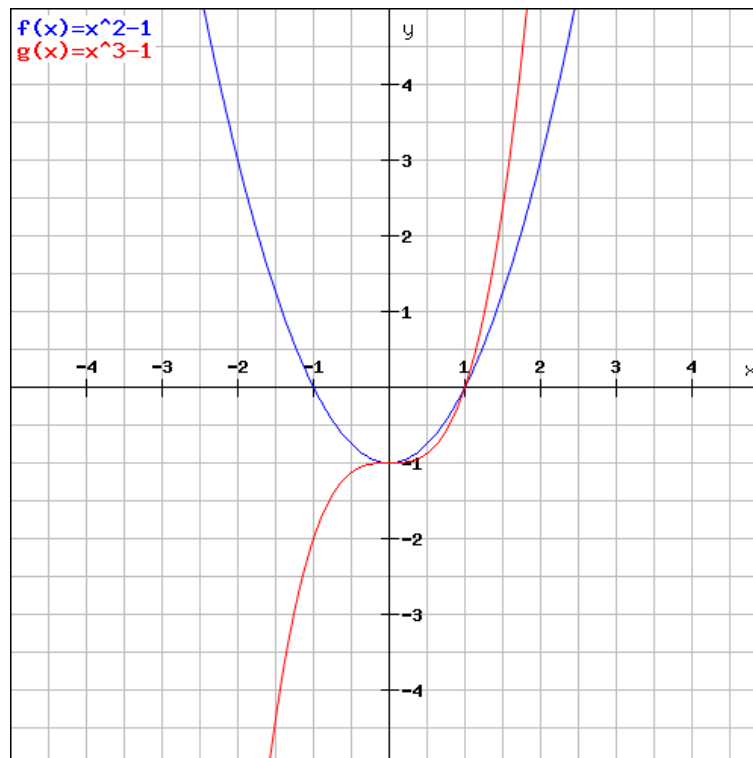


$x^{0,5}$ entspricht einer Wurzelfunktion (siehe Potenzen). Diese sind im negativen Bereich ungültig, weil unter der Wurzel keine negative Zahl stehen darf. Im positiven Bereich kommt es klassisch zu einem runden, verzögerten Anstieg.

Die rote Funktion ist ein bekanntes Beispiel, sie gilt in diesem Fall sozusagen als „Referenzwert“. Die grüne Funktion besitzt einen Exponenten von 6 was zu dem interessanten Effekt führt, da es so scheint, als gäbe es sehr viele Punkte auf der Linie von c. Dies ist leicht erklärbar, wenn man kurz nachdenkt was mit Werten von unter 1 passiert. Beispielsweise am x-Wert von 0,5 ergibt dies einen y-Wert von: $0,5 \times 0,5 \times 0,5 \times 0,5 \times 0,5 - 1$ was in etwa -0,984 entspricht und an -1 sehr nahe dran ist. Der starke Anstieg ab einem x-Wert von 1 ist ebenfalls so zu erklären.

Ungerader oder gerader Exponent?

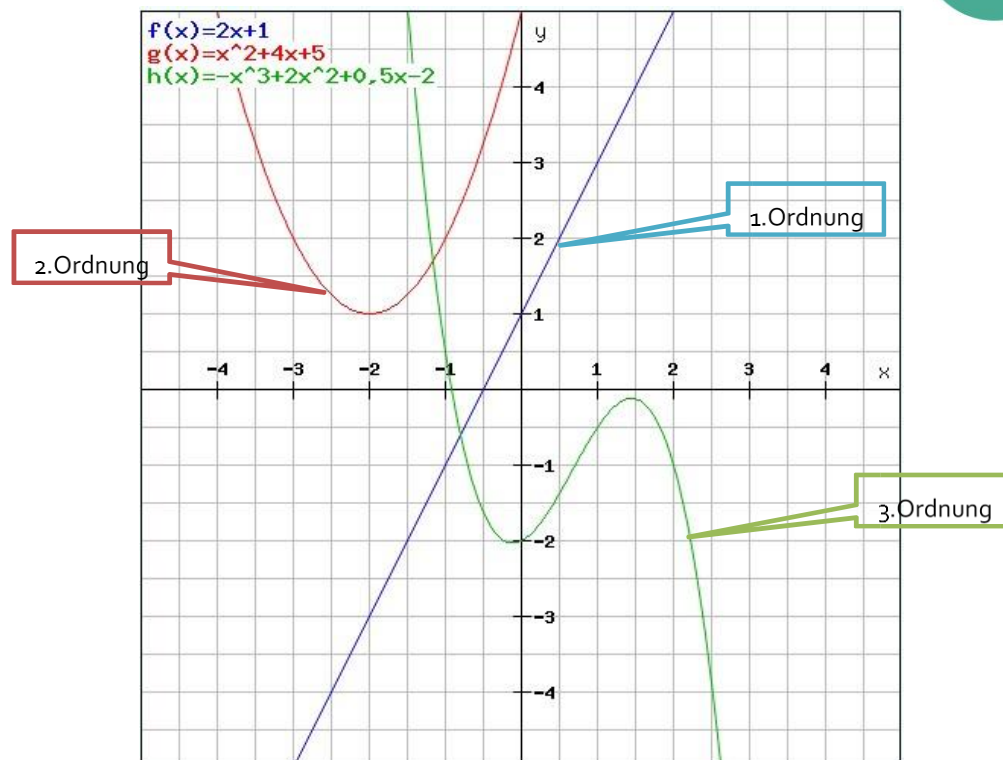
Es macht einen riesen Unterschied im Grafen, partiell im negativen Bereich, ob die Hochzahl gerade oder ungerade ist. Denn: $-1 \times -1 = 1$ und $-1 \times -1 \times -1 = -1$.



6.2.2 Ordnung von Funktionen

Die Ordnung einer Funktion wird quasi durch die Hochzahl festgelegt, so bezeichnet man eine Funktion welche x^2 enthält als Funktion zweiter Ordnung, eine Funktion welche x^3 enthält als Funktion dritter Ordnung und so weiter.

Ordnung	Funktion
Nullte-Ordnung	d
Erste-Ordnung	$kx+d$
Zweite-Ordnung	ax^2+bx+c
Dritte-Ordnung	ax^3+bx^2+cx+d



Es gilt, dass die Höhe der Ordnung über die maximale Anzahl der Nullpunkte (Schnittpunkte mit der x-Achse) entscheidet. Eine Funktion dritter Ordnung hat beispielsweise maximal 3 Nullpunkte.

6.2.3 Quadratische Funktion

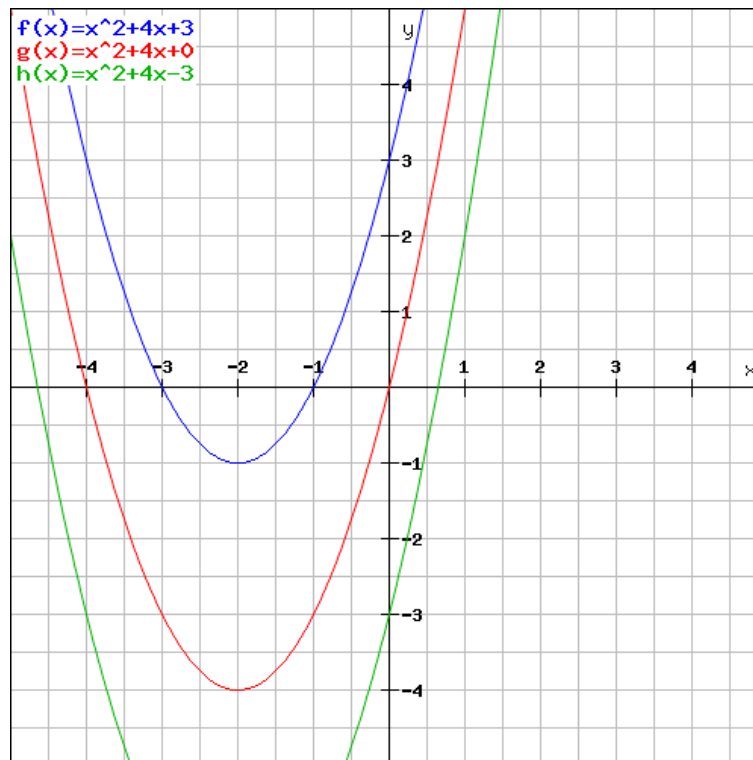
Diese Funktion der zweiten Ordnung zeichnet sich allgemein durch folgende Formel aus:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

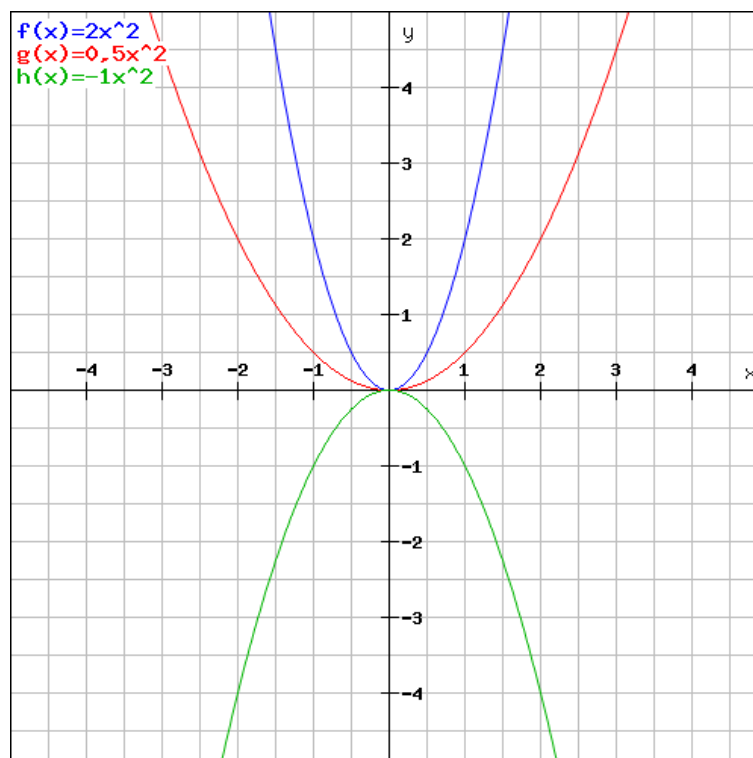
Es sind für jeden y-Wert, 2 x-Lösungen möglich, da $(-4)^2 = 16$ und $4^2 = 16$ beide zutreffend sind. Die Spitze/Tiefpunkt der quadratischen Funktion wird meistens als Scheitelpunkt bezeichnet.

6.2.3.1 Bedeutung der Parameter

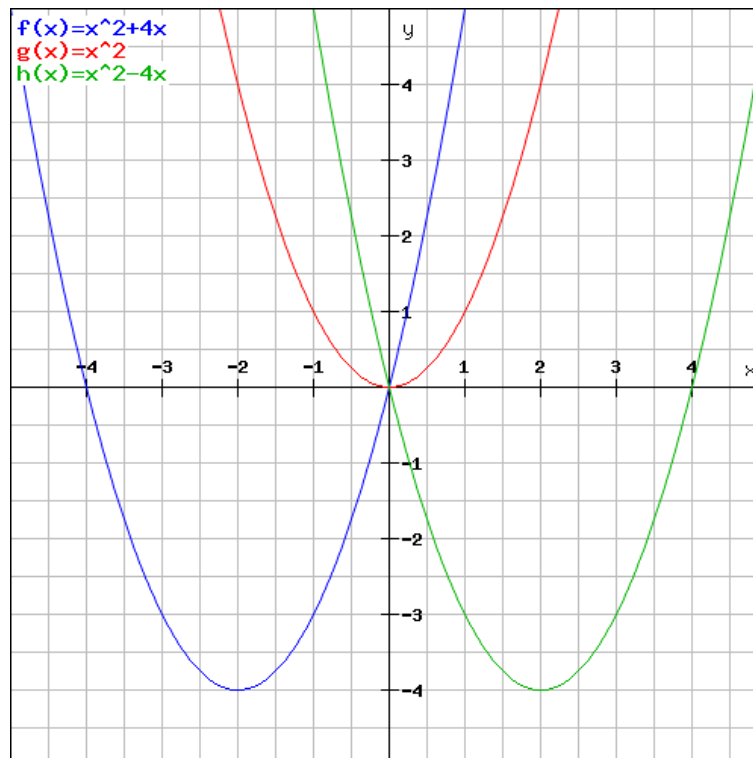
Der statische Wert c entscheidet so wie bei den anderen Funktionen bisher auch über den Schnittpunkt mit der y-Achse.



Der Wert a entscheidet wie bereits besprochen, wieder über die „Breitfächerung“ der Funktion sowie der Orientierung (ob negativ oder positiv).



Interessant wird hierbei der Faktor b , ist er Null so ist die gesamte Funktion achsensymmetrisch und nicht verschoben. Wird b negativ, so verschiebt sich die Achse in den positiven Bereich. Wird b positiv, so verschiebt sie sich in den negativen Bereich. Ebenso verschiebt sich der Scheitelpunkt. Der Nullpunkt bleibt aber konstant auf c definiert.



Lösungsformel für quadratische Funktionen:

1.)

$$0 = ax^2 + bx + c$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

2.)

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{2} - q}$$

$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{2} - q}$$

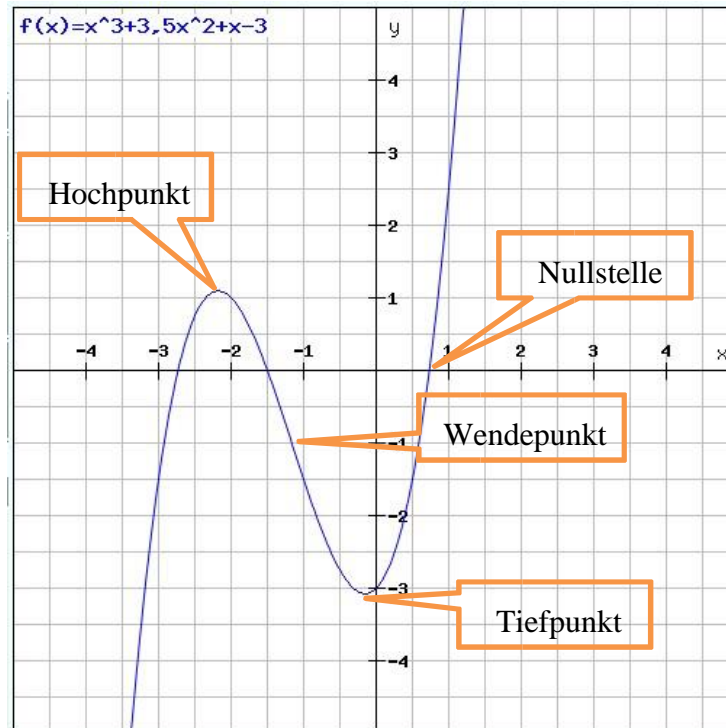
Diese Formel ist manchen auch als „pq-Formel“ oder als „Mitternachtsformel“ bekannt, weil Schüler sie aufsagen können sollen, selbst wenn man sie um Mitternacht weckt und nach der Formel fragt. Für genauere Erklärungen eignen sich Mathematik-Bücher der Oberstufe oder Videos auf YouTube.

6.2.4 Kubische Funktionen und deren Punkte

Eine kubische Funktion definiert sich durch:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Die Bedeutung der einzelnen Variablen wird diesmal nicht ausgiebig besprochen, wichtig sind eher die Punkte, welche eine Funktion 3. Grades aufweist.



Wie man diese Punkte errechnet wird im Kapitel „Differential“ erklärt. An dieser Stelle sei jedoch gesagt, dass sich am Wendepunkt das Krümmungsverhalten zu ändern beginnt. Zum besseren Verständnis: Fährt man mit dem Rad durch beide Kurven so ist der Wendepunkt der Punkt, an welchem man den Lenker kurz gerade hält.

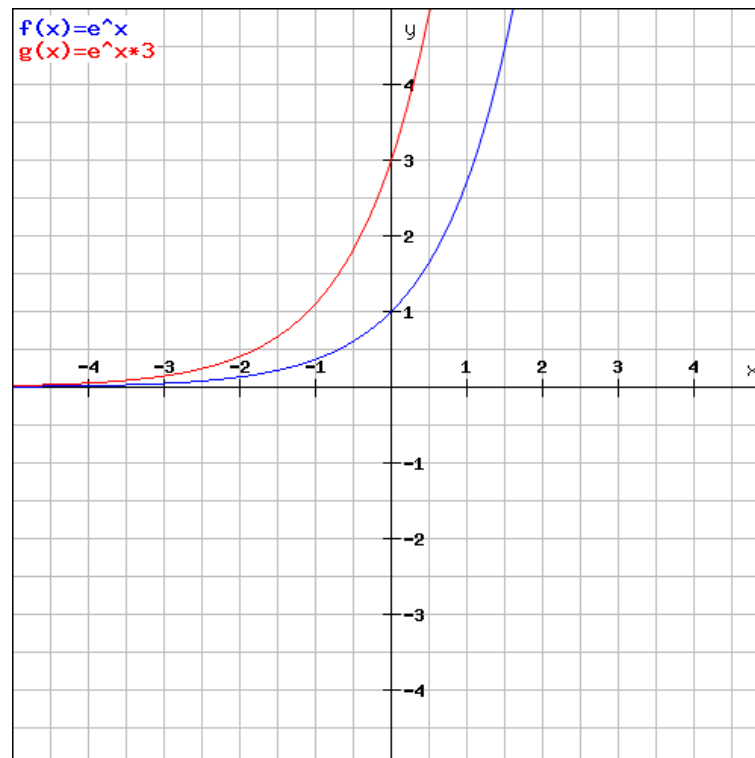
6.3 e-Funktionen

$$f(x) = a^x \times c$$

bzw.

$$f(x) = e^x \times c$$

Die Exponentialfunktionen dienen zur Beschreibung von stark wachsenden oder fallenden Mengen/Populationen (z.B. Bakterien). Prinzipiell gilt, dass die Funktionen auf fast jede Basis bezogen werden könnten (außer, dass „a“ nicht kleiner als 1 sein darf). Es hat sich jedoch etabliert, dass auf die Euler'sche Zahl bezogen wird, welche circa 2,7 entspricht.

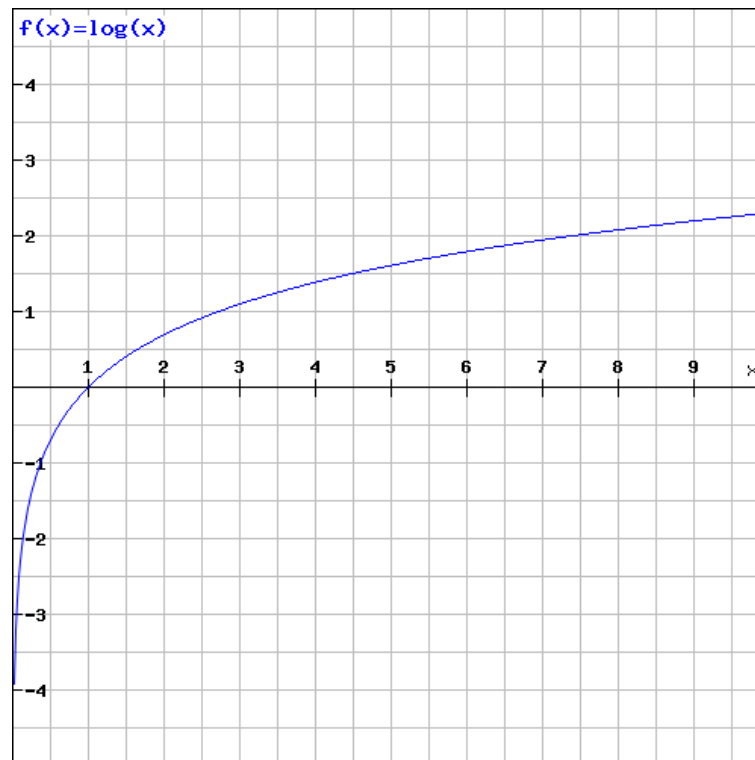


Die Exponentialfunktionen drücken ihr Verhalten hauptsächlich durch den Exponenten aus. Dieser entscheidet, wie schnell die Funktion steigt oder sinkt. Eine weitere Bedeutung hat der statische Wert c , welcher hinzumultipliziert wird und über den Schnittpunkt mit der y-Achse entscheidet (x -Wert = 0).

6.4 Logarithmus

$$f(x) = \log(x)$$

Die Logarithmusfunktionen ohne weitere Addition haben alle ihre Nullstelle bei 1, weil: $\log(1) = 0$. Vielmehr sei an dieser Stelle nicht zu sagen, da ihnen bisher beim Test auch keine große Bedeutung zukam.



6.5 Differential

Auf die Theorie der Differential- und Integralrechnungen wird hier nur wenig eingegangen, da sie auch beim Test noch nicht durch starke Präsenz aufgefallen sind.

6.5.1 Punktsteigung und Ableitung

Den Differentialquotienten kann man sich am besten unter dem Begriff „Punktsteigung“ vorstellen. Er wäre die Steigung, wenn man die Kurve in unendlich viele kleine Punkte zerlegt und zwei Punkte über eine Gerade miteinander verbindet.

Die Funktion, um die Punktsteigung berechnen zu können, erhält man durch Ableiten der Stammfunktion. Nachfolgend sind die wichtigsten Regeln aufgelistet und eher an praktischen Beispielen symbolisiert. (Hier soll wieder daran erinnert werden, dass Differenzieren und Integrieren bis jetzt keine großen Themen beim MedAT waren. Es ist dennoch sinnvoll, zumindest Potenzen ableiten zu können)

6.5.1.1 Potenz- und Summenregel/Differenzregel

$$f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = n \times x^{n-1}$$

„Die Hochzahl nach vorne ziehen und um 1 verringern“

$$f(x) = g(x) + h(x) \rightarrow f'(x) = g'(x) + h'(x)$$

Zu interpretieren ist, dass damit jede Addition als eigene Funktion betrachtet wird und für sich selbst abgeleitet wird. Mit Differenzen wird analog zu Summen verfahren. Sehen wir uns das anhand eines Beispiels an:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^2 - 4x + 15 \\ f'(x) &= 3 \times 2 \times x^1 - 4 \times 1 \times x^0 + 15 \times 0 \times x^{-1} \\ f'(x) &= 6x - 4 \end{aligned}$$

6.5.1.2 Produktregel

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \times h(x) \\ f'(x) &= g'(x) \times h(x) + g(x) \times h'(x) \end{aligned}$$

Werden zwei Funktionen miteinander multipliziert, so werden sie getrennt abgeleitet und abwechselnd mit der Stammfunktion multipliziert. Sehen wir uns das Prinzip an einem Beispiel an, bei welchem wir diese Regel eigentlich nicht bräuchten:

$$f(x) = x^8 \times x^{12}$$

Am besten geht man vor, indem man die Funktionen nach der Formel betrachtet. Es wäre hier zwar nicht zwingend notwendig, jedoch ergibt es sich bei komplizierteren Funktionen schnell:

$$\begin{aligned} g(x) &= x^8 \rightarrow g'(x) = 8 \times x^7 \\ h(x) &= x^{12} \rightarrow h'(x) = 12 \times x^{11} \end{aligned}$$

Formel aufschreiben und einsetzen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(x) \times h(x) + g(x) \times h'(x) \\ f'(x) &= 8 \times x^7 \times x^{12} + x^8 \times 12 \times x^{11} \\ f'(x) &= 8 \times x^{19} + 12 \times x^{19} = 20 \times x^{19} \end{aligned}$$

6.5.1.3 Quotientenregel

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{g(x)}{h(x)} \\ f'(x) &= \frac{g'(x) \times h(x) - g(x) \times h'(x)}{(h(x))^2} \end{aligned}$$

Brüche sind leider schon etwas undankbarer abzuleiten.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2}{x^3} \\ g(x) &= x^2 \rightarrow g'(x) = 2x \\ h(x) &= x^3 \rightarrow h'(x) = 3x^2 \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{g'(x) \times h(x) - g(x) \times h'(x)}{(h(x))^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x \times x^3 - x^2 \times 3x^2}{(x^3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^4 - 3x^4}{x^6} = -\frac{x^4}{x^6} = -x^{-2}$$

6.5.1.4 Kettenregel

$$f(x) = g(h(x))$$

$$f'(x) = g'(h(x)) \times h'(x)$$

Einmal außen abgeleitet und das wird mit der inneren Ableitung multipliziert.

$$f(x) = (x^2 + 12x)^3$$

$$g(x) = r^3 \rightarrow g'(x) = 3 \times r^2$$

$$h(x) = x^2 + 12x \rightarrow h'(x) = 2x + 12$$

$$f'(x) = g'(h(x)) \times h'(x)$$

$$f'(x) = 3 \times (x^2 + 12x)^2 \times (2x + 12)$$

6.5.1.5 Ableitungen besonderer Funktionen

Es gibt ein paar Ableitungen, die muss man sich leider merken:

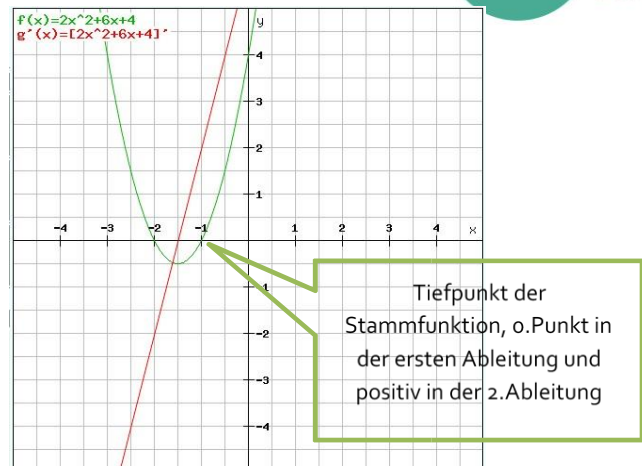
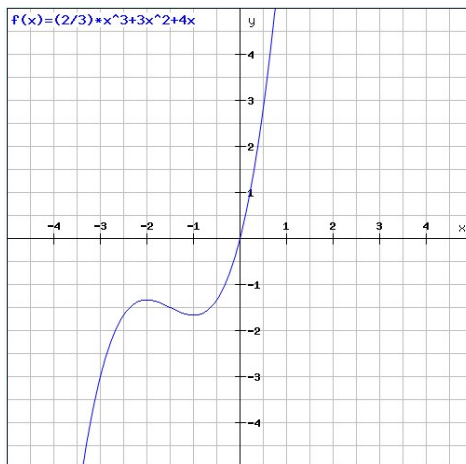
Funktion	Ableitung
Winkelfunktionen	
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$

Exponentialfunktionen	
e^x	e^x
e^{kx}	$k e^{kx}$
a^x	$\ln a \cdot a^x$

Logarithmusfunktionen	
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$a^{\log x}$	$\frac{1}{x \ln a}$

6.5.2 Bedeutung und Anwendung

Die erste Ableitung gibt die Funktion der Steigung der Stammfunktion wieder. Dies kann zum Errechnen von spezifischen Punkten genutzt werden. Was wir uns an folgendem Beispiel ansehen werden.



6.5.2.1 Extremwerte (Hoch- und Tiefpunkt)

Maximum und Minimum haben besondere Eigenschaften, ihre Punktsteigung ist Null. Denn wer genau am Gipfel steht und einen kleinen Schritt nach vorne geht, verändert seine Höhe nicht. Es gilt:

$$f'(x) = 0$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2}{3}x^3 + 3x^2 + 4x \\ f'(x) &= 2x^2 + 6x + 4 \\ 0 &= 2x^2 + 6x + 4 \\ x_1 &= \frac{-6 + \sqrt{6^2 - 4 \times 2 \times 4}}{2 \times 2} = \frac{-6 + 2}{4} = -1 \\ x_2 &= \frac{-6 - \sqrt{6^2 - 4 \times 2 \times 4}}{2 \times 2} = \frac{-6 - 2}{4} = -2 \end{aligned}$$

Nun stellt sich die Frage, was davon ist der Hoch- und Tiefpunkt? Dies beantwortet man, indem man in die zweite Ableitung einsetzt, welche die „Steigung der Steigungsfunktion“ wiedergibt und demnach repräsentiert, ob die Funktion nach dem Punkt abnimmt oder zunimmt.

$$\begin{aligned} f''(x) &= 4x + 6 \\ f''(-1) &= 2 \rightarrow \text{Tiefpunkt} \\ f''(-2) &= -2 \rightarrow \text{Hochpunkt} \end{aligned}$$

Wenn man am Tiefpunkt ist, kann alles nur noch besser werden, daher eine positive Tendenz. Wenn man am Hochpunkt ist, kann alles nur noch negativer werden. Daher:

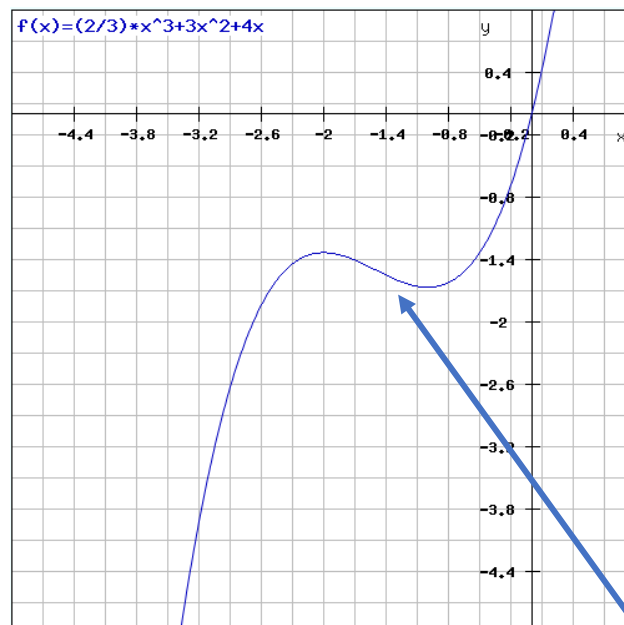
$$\begin{aligned} f''(x_{HP}) &< 0 \\ f''(x_{TP}) &> 0 \end{aligned}$$

Einsetzen in die Stammfunktion liefert die y-Koordinaten der Extremwerte.

6.5.2.2 Wendepunkt

Der Wendepunkt ist der Punkt, an welchem die erste Ableitung ihren Extremwert besitzt. Daher ändert sich hier das Krümmungsverhalten. Die erste Ableitung ist die Steigung. An ihrem Hochpunkt/Tiefpunkt ändert sich das Steigungsverhalten. Um an diesen Punkt zu kommen, muss die erste Ableitung nochmals abgeleitet und 0 gesetzt werden: daher die zweite Ableitung der Stammfunktion bilden.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{2}{3}x^3 + 3x^2 + 4x \\
 f'(x) &= 2x^2 + 6x + 4 \\
 f''(x) &= 4x + 6 \\
 0 &= 4x + 6 \quad | -6 \\
 -6 &= 4x \quad | :4 \\
 x &= -1,5
 \end{aligned}$$



Wendepunkt, der Punkt wo der Fahrradfahrer kurz neutral gehalten ist, bevor man in die nächste Kurve geht!

6.6 Integral

Wir definieren hier einen kleinen Ausdruck um. Bis jetzt war „Stammfunktion“ quasi die gegebene Funktion. Ab jetzt ist die Stammfunktion die Funktion über der gegebenen Funktion.

Integrieren ist die Umkehroperation zum Differenzieren, sie findet hauptsächlich Verwendung bei der Flächen- und Volumenberechnung.

Beim Integrieren kommt es im Gegensatz zum Differenzieren unweigerlich zu einem „Informationsgewinn“, welcher durch die Integrationskonstante C wiedergegeben wird.

$$f(x) = 3x + 5$$

$$f'(x) = 3$$

$$\int f'(x) = 3x + c$$

Die Regeln vom Integrieren sind quasi umgekehrt wie jene vom Differenzieren. Es sei angemerkt, dass nach momentanem Kenntnisstand nur das Wissen vom Potenzen-Integrieren von Bedeutung ist. Dies ist möglich durch die einfache Regel: „Die Hochzahl um eins erhöhen und durch die neue Hochzahl dividieren“.

$$f'(x) = 3x^2 + 5$$

$$\int f'(x) = \frac{3}{3}x^3 + \frac{5}{1}x^1$$

6.7 Flächenberechnung

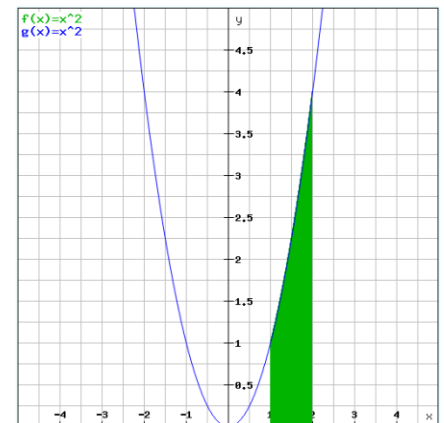
Die Fläche unter einer Funktion kann ermittelt werden, indem die Funktion integriert wird und der Endwert der Stammfunktion mit dem Anfangswert der Stammfunktion subtrahiert wird.

$$\int_a^b f(x) = F(b) - F(a)$$

Die Fläche unter der Funktion x^2 zwischen 1 und 2 soll errechnet werden.

$$\int x^2 = \frac{x^3}{3}$$

$$\int_1^2 x^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3} = 2,3\overline{3}E^2$$

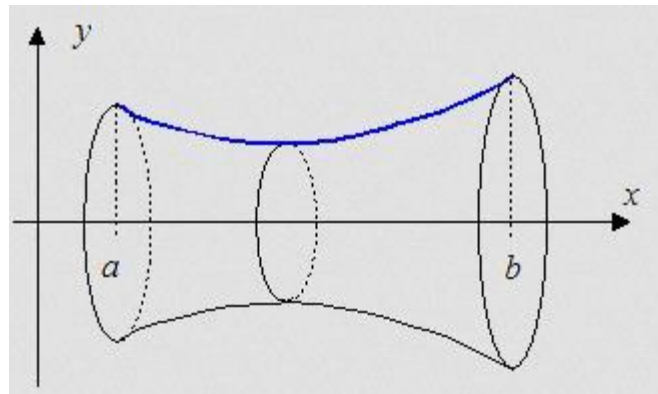


E^2 steht für „Einheiten zum Quadrat“ da wir nicht wissen, was die Funktion selbst behandelt.

Um die Einheit einer Funktionsfläche zu ermitteln, multipliziert man am besten die Einheit der X-Achse mit der Einheit der Y-Achse! (Kleiner Tipp für Physik).

6.8 Volumenberechnung

Die Formel für die Berechnung eines Rotationskörpers leitet sich aus der Fläche eines Kreises und der Integration über eine Länge ab.



Der Kreis in der Mitte hat den Radius des y-Wertes der blauen Funktion. Dadurch ergibt sich für seine Fläche:

$$A = f(x)^2 * \pi$$

Das Volumen a und b ergibt sich, wenn man die Fläche nach x integriert, weil x der einzige Parameter ist, der sich ändert.

$$V = \int_a^b A = \int_a^b f(x)^2 * \pi$$

Konstanten können bei einer Integration nach vorne gezogen werden und bleiben unberührt, dadurch ergibt sich die allgemeine Formel für Volumen-Integrale:

$$V = \pi * \int_a^b f(x)^2$$

Das Volumen eines Rotationskörpers mit der Funktion x^2 soll zwischen 1 und 2 berechnet werden.

$$\begin{aligned} \int (x^2)^2 &= \frac{x^5}{5} \\ V &= \pi * \int_1^2 (x^2)^2 = \pi * \left(\frac{2^5}{5} - \frac{1^5}{5} \right) \\ V &= 3 * \frac{31}{5} = \frac{93}{5} \approx 18E^3 \end{aligned}$$

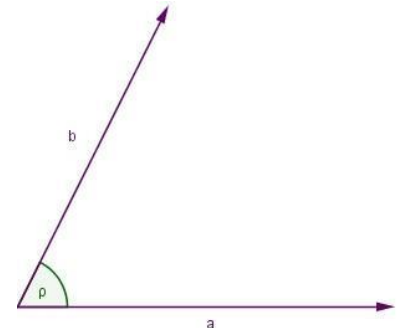
Wenn ähnliche Beispiele beim Test vorkommen, werden entweder „schönere“ Zahlen gewählt oder der Unterschied in den Antworten ist so groß, dass die Antwort geschätzt werden kann.

6.9 Winkel und Winkelfunktionen

Werden leider sehr gerne gefragt beim MedAT.

6.9.1 Winkel

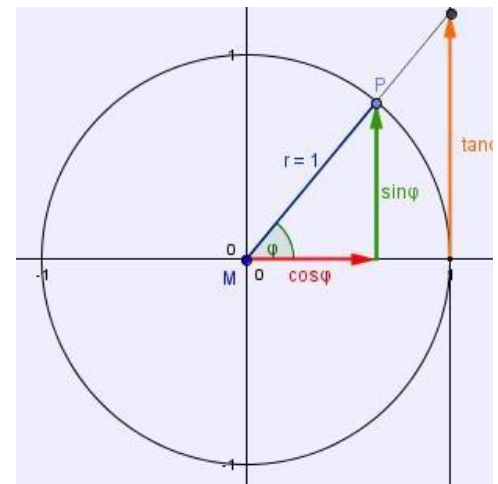
Ein Winkel wird von zwei Strahlen eingeschlossen. Es gibt mehrere Einheiten zum Beispiel Grad, Radian oder die Angabe als Bruchteil von π . Wir befassen uns im großen Stil mit Graden, bei welchen ein ganzer Kreis 360° ausmacht und ein Halbkreis dementsprechend 180° . Um in Rad umzurechnen gilt: $2\pi \text{ rad} = 360^\circ$. Ein Winkel gilt dann als rechter Winkel, wenn er genau 90° hat, ist er kleiner als 90° bezeichnet man ihn als spitzen Winkel und sonst als stumpfen Winkel.



6.9.2 Der Einheitskreis und die Winkelfunktionen

Ich persönlich habe mir mit Winkel und Winkelfunktionen immer schwergetan. Erst die Konfrontation mit dem Einheitskreis hat mir das Verständnis erleichtert.

Der Einheitskreis hat einen Radius von genau 1cm, die 4 Quadranten sind abzugrenzen als 90° bzw. $\frac{\pi}{2}$, 180° bzw. π , 270° bzw. $\frac{3}{2}\pi$, 360° bzw. 2π .



6.9.2.1 Cosinus

Der Cosinus ist definiert als:

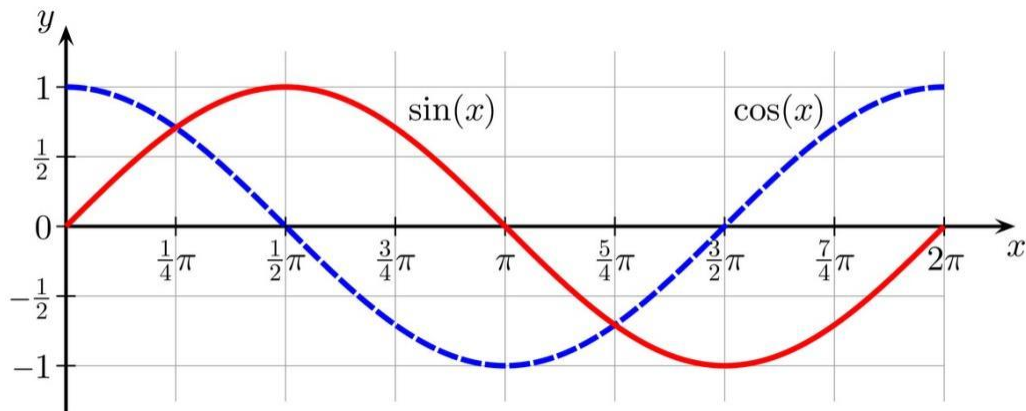
$$\cos \varphi = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

Im Einheitskreis ist die Hypotenuse genau 1, weswegen der Cosinus des Winkels genau dem x-Wert des Punktes P entspricht.

Sehen wir uns sein Verhalten genauer an:

Winkel	360° bzw. 2π	90° bzw. $\frac{\pi}{2}$	180° bzw. π	270° bzw. $\frac{3}{2}\pi$
Wert	1	0	-1	0

Es gibt natürlich noch den Fall des Winkels von 45° bzw. $\frac{\pi}{4}$, leider kein schöner Wert: $\frac{\sqrt{2}}{2}$



6.9.2.2 Sinus

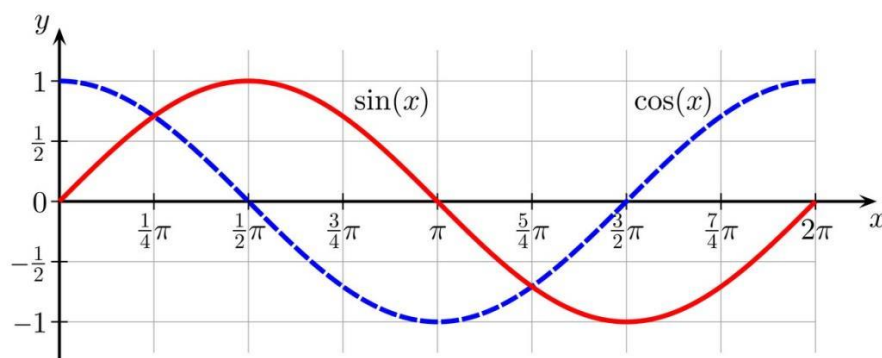
Der Sinus ist definiert als:

$$\sin \varphi = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

Sein Verhalten in Tabellenform:

Winkel	360° bzw. 2π	90° bzw. $\frac{\pi}{2}$	180° bzw. π	270° bzw. $\frac{3}{2}\pi$
Wert	0	1	0	-1

Es gibt auch hier natürlich wieder den Fall des Winkels von 45° bzw. $\frac{\pi}{4}$, mit einem Wert von: $\frac{\sqrt{2}}{2}$

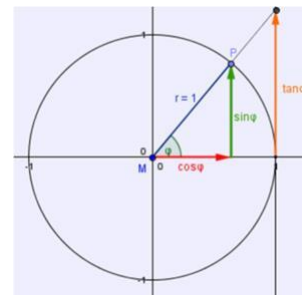


Diese Grafik ist von hoher Wichtigkeit und wird gerne gefragt!

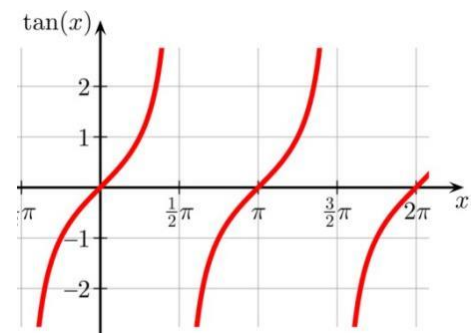
6.9.2.3 Tangens

Diese Winkelfunktion ist aus meiner Sicht die schwierigste. Der Tangens leitet sich aus den anderen beiden Winkelfunktionen ab.

$$\tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{\frac{G}{H}}{\frac{A}{H}} = \frac{G * H}{A * H} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$



Sich die Werte beim Tangens vorzustellen ist etwas mühsamer. Am besten merkt man sich dazu (siehe obige Abbildung), dass der Tangens als „Verlängerung des Winkels **außerhalb** des Kreises“ dargestellt werden kann. Er ist dem Sinus sehr ähnlich, dieser befindet sich jedoch **innerhalb** des Kreises und maximiert sich daher bei 90° zum Kreisradius von 1. Der Tangens hingegen, welcher nicht an den Kreis gebunden ist, maximiert sich ins Unendliche und wird daher als undefiniert gehalten. Am Punkt von 270° passiert ähnliches, der Sinus wird zu -1 und der Tangens geht negativ ins Unendliche.



Bei 0° und 180° passiert exakt dasselbe mit Sinus und Tangens:

Winkel	360° bzw. 2π	90° bzw. $\frac{\pi}{2}$	180° bzw. π	270° bzw. $\frac{3}{2}\pi$
Wert	0	undefiniert	0	undefiniert

Am Winkel von 45° bzw. $\frac{\pi}{4}$, ist der Tangens genau 1. (In den Zeichnungen des Einheitskreises kann daher der Winkel nicht 45° sein, auch wenn es verlockend danach aussieht).

7 Geometrie

Ein Kapitel, in welchem doch manchmal Fragen kommen, speziell in ähnlicher Form wie:
„Wenn man den Radius einer Kugel verdoppelt, wie verhält sich das Volumen?“

Es gilt: möglichst wenig auswendig lernen und viel **verstehen**, bei jeder Formel 2x darüber nachdenken, wie man drauf kommt, das spart anstrengendes Auswendiglernen! (Das müsst ihr woanders noch genug!)

7.1 Vierecke

Allgemein gilt, dass für den Umfang alle Seiten zusammenaddiert werden und die Winkelsumme 360° sein muss!

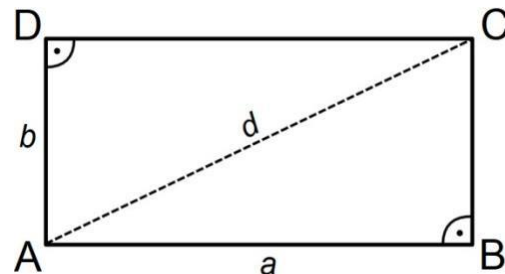
7.1.1 Rechteck

Winkelsumme: $360^\circ = \alpha + \beta + \gamma + \delta$

Umfang: $U = 2 * a + 2 * b$

Flächeninhalt: $A = a * b$

Diagonale: $d = \sqrt{a^2 + b^2}$



7.1.2 Quadrat

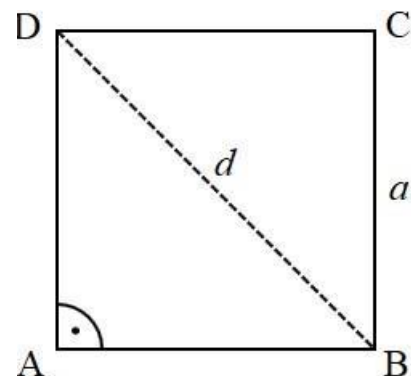
Das Quadrat ist eine Sonderform des Rechtecks, bei welcher alle Seiten gleich lang sind. Dementsprechend ändern sich auch die Formeln etwas.

Winkelsumme: $360^\circ = \alpha + \beta + \gamma + \delta$

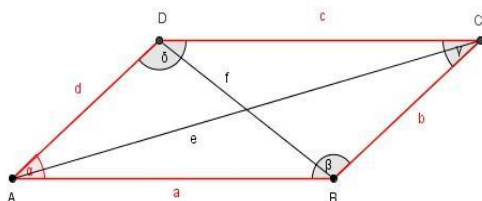
Umfang: $U = 4 * a$

Flächeninhalt: $A = a * a = a^2$

Diagonale: $d = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a * \sqrt{2}$



7.1.3 Parallelogramm



Ist ein Vieleck, bei welchen die gegenüberliegenden Seiten gleich lang sind. Dadurch gilt:

$$a = c \text{ \& \; } b = d$$

Gegenüberliegenden Winkel sind gleich groß:

$$\alpha = \gamma \text{ \& \; } \beta = \delta$$

So wie die benachbarten Winkel, sind sie supplementär und bilden 180° , z.B. $\alpha + \delta = 180^\circ$

Winkelsumme: $360^\circ = \alpha + \beta + \gamma + \delta$

Umfang: $U = 2 * a + 2 * b$

Flächeninhalt: $A = a * h_a = b * h_b$ wobei $h_a = \sin(\alpha) * d$ und $h_b = \sin(\gamma) * c$

h_a ist die Höhe weggehend von a zu c, analog dazu ist h_b von b zu d („Verschobenes Rechteck“).

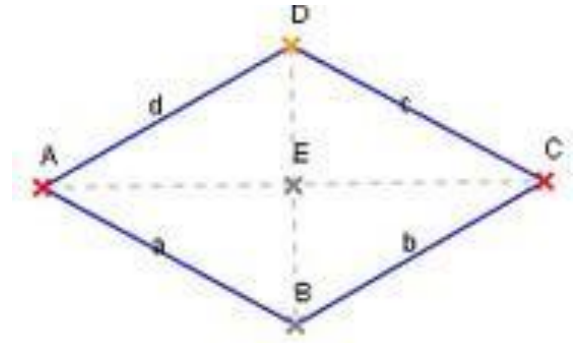
7.1.4 Raute

So wie das Parallelogramm ein verschobenes Rechteck ist, ist die Raute ein verschobenes Quadrat. Wieder gilt, dass die benachbarten Winkel 180° bilden.

Winkelsumme: $360^\circ = \alpha + \beta + \gamma + \delta$

Umfang: $U = 4 * a$ (in der Grafik sind die Seiten gleich lang)

Flächeninhalt: $A = a * h = \frac{e * f}{2}$



Flächeninhalt und Diagonallänge gestalten sich bei Raute und Parallelogramm etwas mühsam. Da sie bis jetzt noch nicht Thema waren beim MedAT, werden wir sie hier getrost weglassen.

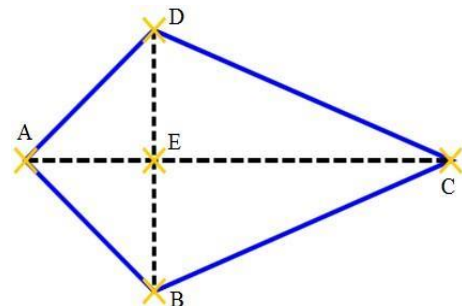
7.1.5 Deltoid

In einem Deltoid gilt, dass Nachbarseiten gleich lang sind, ebenso sind die sich gegenüberliegenden Winkel gleich groß.

Winkelsumme: $360^\circ = \alpha + \beta + \gamma + \delta$

Umfang: $U = 2a + 2b$

Flächeninhalt: $A = \frac{e * f}{2}$



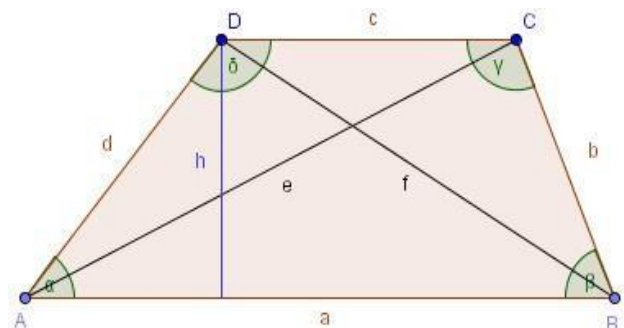
7.1.6 Trapez

Das Trapez ist ein Viereck, bei welchem zwei Seiten zueinander parallel liegen. Die beiden, an die „nicht-parallelen-Seiten“ anliegenden Winkel, bilden gemeinsam 180° .

Winkelsumme: $360^\circ = \alpha + \beta + \gamma + \delta$

Umfang: $U = a + b + c + d$

Flächeninhalt: $A = \frac{(a+c)*M}{2}$ mit $h = \sin(\alpha) * d$



7.2 Dreieck

Das Dreieck hat drei Punkte, drei Seiten und die Winkel addieren sich immer zu 180° .

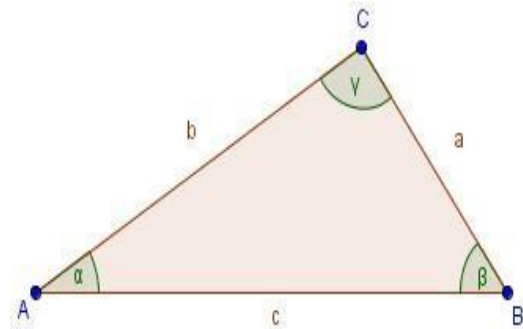
7.2.1 Ungleichseitiges Dreieck

Das ungleichseitige Dreieck ist das, am häufigsten vorkommende, Dreieck ohne Besonderheiten. Alle Seiten sind unterschiedlich lang, alle Winkel unterschiedlich groß.

Winkelsumme: $180^\circ = \alpha + \beta + \gamma + \delta$

Umfang: $U = a + b + c$

Flächeninhalt: $A = \frac{c \cdot h_c}{2}$ mit $M_c = \sin(\alpha) \cdot b$



7.2.2 Rechtwinkeliges Dreieck

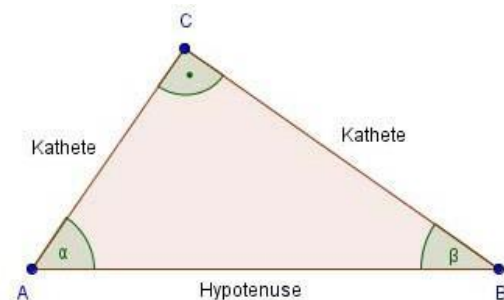
Im rechtwinkligen Dreieck gelten besondere Regeln. Sinus, Cosinus und Tangens lassen sich direkt auf die Seiten anwenden und der Satz des Pythagoras greift.

Winkelsumme: $180^\circ = \alpha + \beta + 90^\circ$

Umfang: $U = a + b + c$

Flächeninhalt: $A = \frac{a \cdot b}{2}$ weil $h_c = \sin(90) \cdot b = b$

Satz des Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$



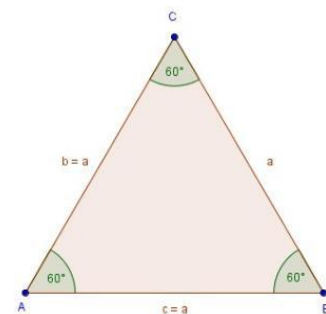
7.2.3 Gleichschenkeliges Dreieck

Beide Schenkel sind gleich lang. Dadurch sind die beiden, der Basis anliegenden Winkel, genau gleich groß.

Winkelsumme: $180^\circ = \alpha + \beta + \gamma$ ($\alpha = \beta$)

Umfang: $U = 3 \cdot a$

Flächeninhalt: $A = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$



7.3 Kreis

Durchmesser: $d = 2 * r$

Umfang: $2 * r * \pi$

Kreisfläche: $r^2 * \pi$

Die Kreisfläche leitet sich nun so ab, dass Kreissegmente ineinander geschachtelt eine Fläche ergeben, bei welcher der Radius, die Breite und der halbe Umfang die Länge bilden.

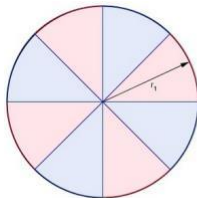


Fig. 1

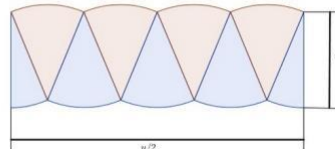
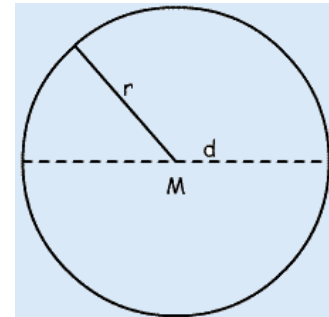


Fig. 2



7.4 Kugel

Volumen: $V = \frac{4}{3} * \pi * r^3$

Oberfläche: $O = 4 * \pi * r^2$



Kreis, Kugel, Sinus und Cosinus sind gern gefragte Themen beim MedAT!

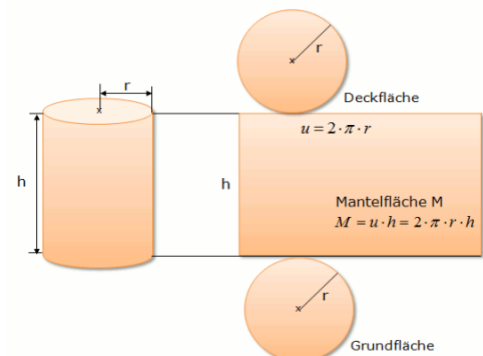
7.5 Zylinder

Zylinder haben einen Kreis als Grundfläche und eine rechteckige Mantelfläche.

Volumen: $G * h = \pi * r^2 * h$

Oberfläche: $2 * G + M = 2 * \pi * r^2 + 2 * \pi * r * h$

Zylinder berechnen: Mantelfläche, Grundfläche, Deckfläche



7.6 Kegel

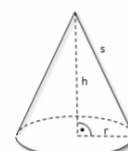
Der Kegel besitzt wieder eine kreisförmige Grundfläche, jedoch eine Mantelfläche, welche einem Kreisausschnitt entspricht.

Volumen: $\frac{1}{3} * G * h = \frac{1}{3} * \pi * r^2 * h$

Oberfläche: $G + M = r^2 \pi + \pi * r * s$

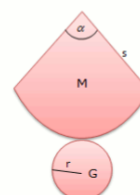
Seitenlänge: $s = \sqrt{r^2 + h^2}$

Kegel Volumen, Mantel und Oberfläche



Volumen eines Kegels

$$V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} * G * h = \frac{1}{3} * \pi r^2 * h$$



Mantelfläche und Oberfläche eines Kegels

Mantelfläche M = Kreisausschnitt: $M = \pi * r * s$

Grundfläche G = Kreisfläche: $G = \pi * r^2$

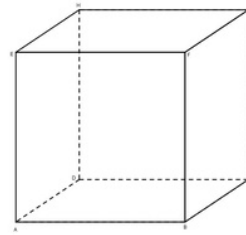
Oberfläche $O_{\text{Kegel}} = G + M = \pi r^2 + \pi * r * s$

7.7 Würfel

Alle Seiten sind gleich lang, die Winkel sind alle 90° groß

Volumen: $V = a^3$

Oberfläche: $O = 6 * a^2$

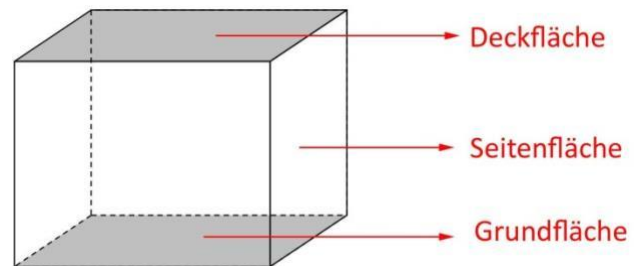


7.8 Quader

Die Seiten sind unterschiedlich lang.

Volumen: $V = a * b * h$

Oberfläche: $O = 2 * [(a * b) + (b * h) + (a * h)]$



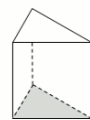
7.9 Prisma

Bei Prismen handelt es sich um Figuren mit verschiedenen Grundflächen:

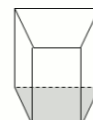
Volumen: $O = 2 * G + M$

Oberfläche: $V = G * h$

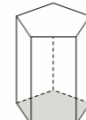
Prismen mit verschiedenen Eckenzahlen



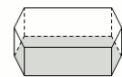
Dreiecksiges Prisma



Vierecksiges Prisma



Fünfecksiges Prisma



Sechsecksiges Prisma

Die Grundfläche ist individuell verschieden, genauso wie die Mantelfläche. Letztere erhält man, indem man die Flächen aller Seiten (exklusive Grund- und Deckfläche) zusammenzählt.

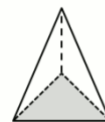
7.10 Pyramide

Die Pyramide ist ein von einer Grundfläche weg, spitz zulaufender Körper. Seine Form ist, ähnlich wie beim Prisma, abhängig von der Grundfläche.

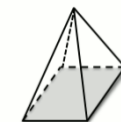
Volumen: $V = \frac{1}{3} * G * h$

Oberfläche: $O = G + M$

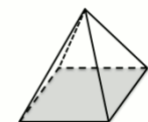
Pyramiden mit verschiedenen Grundflächen



Dreieckspyramide



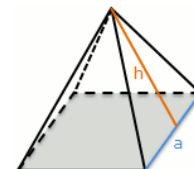
Rechteckspyramide



Quadratische Pyramide



Eine Seite der Pyramiden errechnet sich oft mit der Flächenformel für gleichschenkelige Dreiecke: $A = \frac{a}{2} * h_a$



7.11 Tetraeder

Ein Tetraeder besteht aus gleich langen Kanten, wobei alle Begrenzungsflächen (damit sind gleichseitige Dreiecke gemeint) kongruent, daher deckungsgleich, sind. Es grenzen in jedem Eckpunkt 3 Kanten bzw. Flächen zueinander.

a stellt die Seitenlänge und gleichzeitig die Seitenlänge der Deckflächen des Tetraeders dar. Eine weitere Besonderheit des Tetraeders ist, dass es symmetrisch bezüglich der Mittelebenen ist. Die Oberfläche des Tetraeders kann durch vier gleichseitige, kongruente Dreiecke beschrieben werden.

Zusammenfassend besteht ein Tetraeder aus vier gleichseitigen Dreiecken (vier Grundflächen), sechs gleichlangen Kanten und vier Ecken.

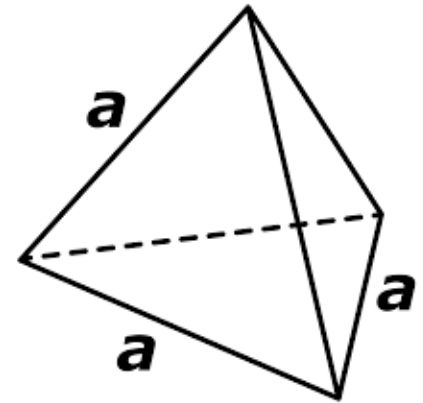


Abbildung 1
https://universaldenker.de/illustrationen/1006

Die wichtigsten Formeln sind:

$$V = \frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{12}$$

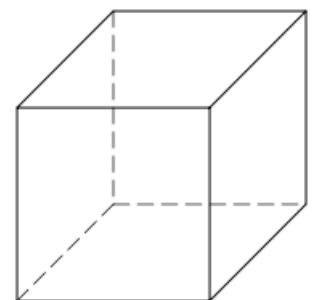
$$O = a^2 \cdot \sqrt{3}$$

$$h = \sqrt{6} \cdot \frac{a}{3}$$

a ist hierbei die Seitenlänge (alle Seiten gleichlang!)

7.12 Hexaeder

Der regelmäßige Hexaeder (griech. „Hexa“ für Sechs) ist ein weiterer mathematischer Körper dessen Form durch 6 Flächen beschrieben wird. Zum Aufbau kann gesagt werden, dass an jeder Ecke drei Kanten, zusammentreffen und dass er aus 6 Flächen, die alle regelmäßige Vielecke sind, besteht. Es besteht in Summe aus sechs Quadranten als Flächen, zwölf Kanten und acht Ecken. Obwohl alle Hexaeder 6 Flächen haben gibt es verschiedene Variationen, bei denen die Anzahl der Ecken und Kanten unterschiedlich ist.



$$O = 6a^2$$

$$V = a^3$$

8 Vektorrechnung

Welche Größen vektoriell und welche skalar sind, wurde bereits geklärt. Jetzt wollen wir uns genauer anschauen, was ein Vektor ist und wie man mit Vektoren rechnet. Hierbei wird der Fokus speziell auf 2D-Vektoren gelegt, aber man kann die Prinzipien auch auf 3D-Vektoren übertragen. Ein Vektor hat immer eine Größe und auch eine Richtung. Im 3D-Koordinatensystem kann man das in die x-, y- und z-Anteile unterteilen.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \text{Von oben nach unten: x-, y- und z-Anteile}$$

Nun kann man mit Vektoren auch rechnen: die wichtigsten Rechengänge, die man hierbei anwendet, sind das Addieren, das Subtrahieren und zwei verschiedene Arten des Multiplizierens (mehr dazu später).

8.1 Betrag

Den Betrag eines einzelnen Vektors kann man auch in 3D berechnen, aber für den MedAT sollte die Berechnung in 2D ausreichen. Hierbei kommt der **Satz des Pythagoras** zum Einsatz:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Hierbei ist unser Betrag c. Somit müssen wir nur die Wurzel aus der Summe der Quadrate ziehen.

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

c ist dann der Betrag unseres Vektors und stellt den Abstand vom Beginn bis zum Ende dar.

$$\vec{a} * \vec{b} = |\vec{a}| * |\vec{b}| * \cos \varphi$$

8.2 Winkel

Den Winkel zwischen zwei Vektoren kann man mit der oben gezeigten Formel berechnen, aber höchstwahrscheinlich wird solch ein Beispiel nicht zum MedAT kommen. Zumal man für eine Berechnung komplizierter Vektoren einen Taschenrechner brauchen würden.

8.3 Einheitsvektor

Ein Einheitsvektor besitzt die gleiche Richtung (Orientierung), wie der Vektor, von dem er erstellt wird. Er hat die Länge einer einzelnen Längeneinheit (je nach Skalierung des Graphen z.B. 1cm). Dafür braucht man nur mit dem Tangens den Winkel berechnen, der mit der x-

Achse aufgespannt wird und berechnet sich dann mit Cosinus und Sinus den x- bzw. den y-Anteil des Vektors (Hypotenuse=1)

8.4 Normalvektor

Ein Normalvektor ist einfach ein Vektor der normal auf den anderen steht. Hierbei vertauscht man einfach nur x- und y-Anteile des Vektors und setzt vor einen der Anteile ein Minus. Hierbei ist egal, ob man den x- oder den y-Anteil negativ macht (Im 2D-Raum kann man zwei rechtwinkelige Vektoren zu einem Ursprungsvektor erzeugen).

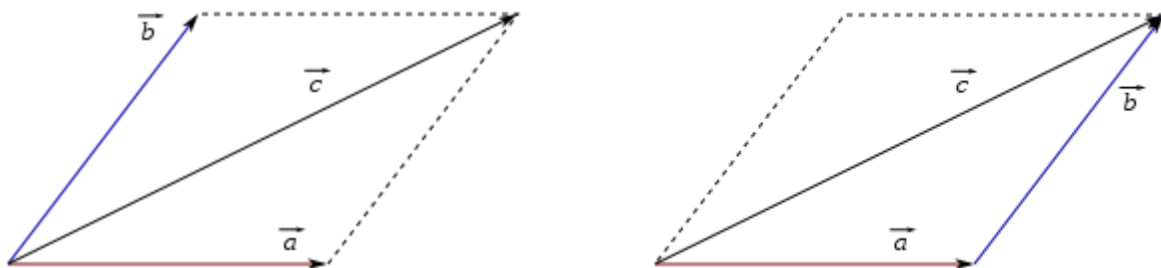
$\vec{v} = (a, b)$ ist unser Ursprungsvektor. Somit sind $(-b, a)$ und $(b, -a)$ rechtwinkelig darauf.

8.5 Vektoraddition

Beim Addieren von Vektoren addiert man die einzelnen Anteile der Vektoren miteinander.

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

Grafisch kann man sich eine Addition von Vektoren auch so vorstellen, dass der Beginn eines Vektors (a) an das Ende des anderen Vektors gestellt wird (b) und der resultierende Vektor (c) verbindet den resultierenden Endpunkt mit dem Anfangspunkt des ersten Vektors (a).

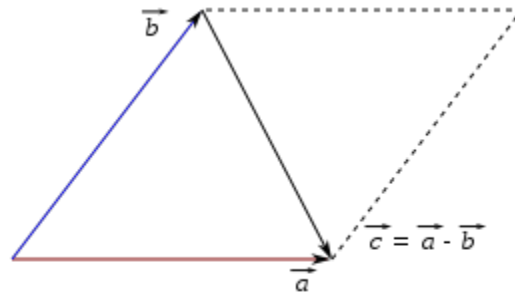


8.6 Vektorsubtraktion

Beim Subtrahieren von Vektoren geht man rechnerisch gleich vor wie beim Addieren: Man subtrahiert die Einzelteile des 1. Vektors jeweils mit den Anteilen des 2. Vektors.

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$$

Grafisch kann man die Subtraktion so darstellen, dass man den 2. Vektor (b) an den Beginn des 1. Vektors (a) legt und der Endpunkt des 2. Vektors zum Endpunkt des zweiten Vektors gezogen wird. Achtung: hierbei ist es im Gegensatz zum Addieren wichtig, welcher Vektor von welchem abgezogen wird! (Beim Addieren kann man die beiden Vektoren vertauschen)

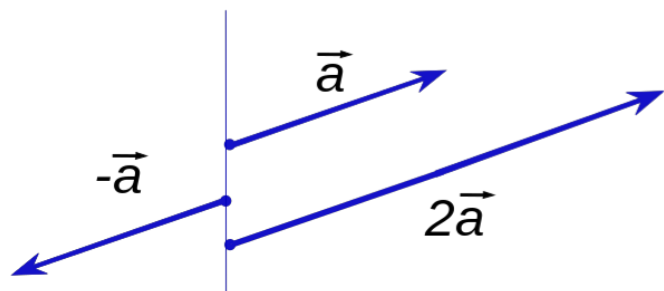


8.7 Vektormultiplikation

Multiplizieren eines Vektors mit einem Skalar

Man kann einen Vektor mit einem Skalar multiplizieren, um ihn zu verlängern oder in die Gegenrichtung zu drehen. Hierbei wird der Skalar einfach mit jedem der einzelnen Anteile des Vektors multipliziert.

$$r\vec{a} = r \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra_1 \\ ra_2 \\ ra_3 \end{pmatrix}$$



Skalarprodukt zweier Vektoren

Das Skalarprodukt ist eine Multiplikation von zwei Vektoren, dessen Ergebnis ein Skalar ist, d.h. eine reelle Zahl, im Gegensatz zum Kreuzprodukt, das ein Vektor als Ergebnis ausliefert. Eine wichtige Voraussetzung für die Berechnung des Skalarproduktes ist, dass die beiden Vektoren die gleiche Anzahl an Komponenten haben.

Das Skalarprodukt entspricht der Multiplikation der x, y bzw. z Komponente der jeweiligen Vektoren sowie ihrer anschließenden Addition.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \circ \vec{b} = x_a x_b + y_a y_b$$

Zum Beispiel:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow \text{in dem Fall sind } x_a = -5 \text{ sowie } y_a = 4$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix} \rightarrow x_b = 2 \text{ sowie } y_b = -7$$

$$\vec{a} \circ \vec{b} = (-5)(+2) + (+4)(-7) = -10 - 28 = -38$$

Wenn die 2 Vektoren **senkrecht** zueinanderstehen würden, würde das jeweilige Skalarprodukt **0 betragen**.

Winkel zwischen 2 Vektoren

Definitionsgemäß kann ein Winkel beliebige Werte zwischen 0° und 180° annehmen. Zum besseren Verständnis wird die Berechnung des Winkels zwischen 2 Vektoren anhand eines Beispiels erklärt. In der Mathematik werden 2 Arten von Drehsinn unterschieden: zum einen gibt es den mathematisch positiven Drehsinn, der einer Drehung gegen den Uhrzeigersinn entspricht und zum anderen den mathematisch negativen Drehsinn, den eigentlichen Uhrzeigersinn.

In der Abbildung 1 wird zwischen den zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} der Winkel θ gebildet. Es wird mathematisch so vereinbart, dass immer der kleinere Winkel für die Winkelberechnung betrachtet wird (in unserem Fall θ). Die Formel für die Winkelberechnung lautet:

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

In unserem Fall werden die 2 Vektoren folgendermaßen definiert:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

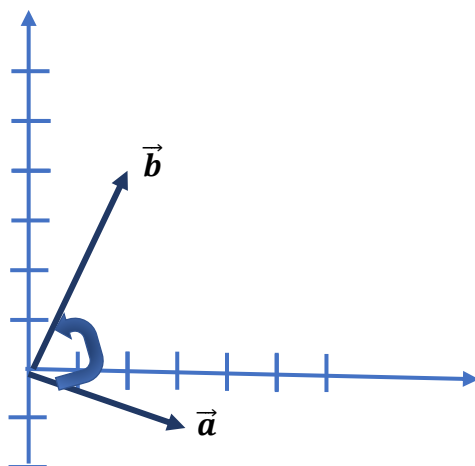


Abbildung 1.

Den Betrag der 2 Vektoren berechnet man anhand der Formel $|\vec{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2}$

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2} = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{x_b^2 + y_b^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$$

Das Skalarprodukt bekommt man durch die Multiplikation der jeweiligen Komponenten und ihre anschließende Addition:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = x_a x_b + y_a y_b = 3 \circ (-1) + 2 \circ 4 = -3 + 8 = 5$$

Durch das Einsetzen des Skalarproduktes und der Länge der Vektoren in die ursprüngliche Formel wird das Ergebnis geliefert:

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \circ |\vec{b}|} = \frac{5}{\sqrt{10} \circ \sqrt{20}}$$

Die anschließende Auflösung nach θ liefert das endgültige Ergebnis:

$$\theta = \cos^{-1} \frac{5}{\sqrt{10} \circ \sqrt{20}} = \cos^{-1} 0,3535 = 69,29^\circ$$

Der Winkel θ zwischen den beiden Vektoren \vec{a} und \vec{b} beträgt somit $69,29^\circ$.

9 Quellen- und Bildverzeichnis

¹ http://www.mathematik-wissen.de/rechenregeln_und_rechengesetze.htm

Aufrufdatum: 09.07.2015 20:41

² <http://www.free-education-resources.com/www.mathematik.net/o-tabellen/zahlenbereiche.htm>

Aufrufdatum: 09.07.2015 21:04

³ http://www.madipedia.org/images/5/5f/%C3%9Cberischt_Zahlbereiche_1.jpg

Aufrufdatum: 09.07.2015 21:07

⁴ <http://www.online-wissen.org/mathematik/zehnerpotenzen-und-ihre-praefixe>

Aufrufdatum: 09.07.2015 21:19

⁵ <http://www.geodsz.com/deu/d/SI-Einheiten>

Aufrufdatum: 09.07.2015 21:21

⁶ http://www.mathe-lexikon.at/media/advanced_pictures/flaechenmasse.jpg

Aufrufdatum: 09.07.2015 23:19

⁷ http://www.mathe-lexikon.at/media/advanced_pictures/litermasse_1.jpg

Aufrufdatum: 09.07.2015 23:21

⁸ http://www.mathe-online.at/mathint/diff1/i_ableitungen.html

Aufrufdatum: 02.08.2015 14:00

⁹ http://www.dieter-heidorn.de/Mathematik/RP_Analysis1/K8_Anwendungen/Anwendungen_html_f025c8f.gif

Aufrufdatum: 02.08.2015

¹⁰ http://www.mathe-online.at/materialien/heike.farkas/files/Vektorrechnung_Ebene/winkel1.jpg

Aufrufdatum: 02.08.2015

¹¹ http://www.mathe-online.at/materialien/julian.langmann/files/Winkelfunktionen_am_EHK/ehk5.png

Aufrufdatum: 02.08.2015

¹² <http://www.mathe-online.at/lernpfade/einheitskreis/?kapitel=2>

Aufrufdatum: 02.08.2015

¹³ https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/7/74/Tangent_plot.svg/2000px-Tangent_plot.svg.png

Aufrufdatum: 02.08.2015

¹⁴ <https://encrypted-tbn3.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcS5w9zVAmnxIKMyMTc6KsLH4cC2OyCTVRFsI0HkKhvIHHiYGUy-bsQ2oEkIN>

Aufrufdatum: 02.08.2015

15

[SquareDefinition.svg.png](#)

Aufrufdatum: 02.08.2015

16

http://www.mathe-lexikon.at/media/advanced_pictures/parallelogramm_skizze1.jpg

Aufrufdatum: 02.08.2015

17

<https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/49/Raute.png>

Aufrufdatum: 02.08.2015

18

[Drachenviereck.svg.png](#)

Aufrufdatum: 02.08.2015

19

http://www.mathe-lexikon.at/media/advanced_pictures/trapez_01.jpg

Aufrufdatum: 02.08.2015

20

https://encrypted-tbn1.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcTDhaVeHEL_zsBJZgnarLu0lkSVzjDUCRcpmW6d0JXWodFM4mePw DTwIHs

Aufrufdatum: 02.08.2015

21

http://www.mathe-lexikon.at/media/advanced_pictures/rechtwinklig.jpg

Aufrufdatum: 02.08.2015

22

http://www.mathe-lexikon.at/media/advanced_pictures/gleichschenkelig.jpg

Aufrufdatum: 02.08.2015

23

http://www.mathe-lexikon.at/media/advanced_pictures/gleichseitig.jpg

Aufrufdatum: 02.08.2015

24

<http://www.matheboard.de/mathe-formeln-pics/kreis.gif>

Aufrufdatum: 02.08.2015

25

[https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/2/23/SquareDefinition.svg/220px -](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/2/23/SquareDefinition.svg/220px-)

26

<https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/c/cb/Drachenviereck.svg/440px->

27

http://www.mathe-online.at/materialien/alina.jannach/files/Lernpfad/Flaechenformel_herleitung.jpg

Aufrufdatum: 02.08.2015

28

<https://www.roedentaler.de/images/content/product/full/bauble-14.jpg>

Aufrufdatum: 02.08.2015

29

<http://www.schulminator.com/sites/default/files/wiki/kegel-berechnen-kegel-volumen-kegel-formel.png>

30

<http://www.schulminator.com/sites/default/files/wiki/zyylinder-berechnen-geometrie-flaeche-formel.png>

Aufrufdatum: 02.08.2015

31

http://media.4teachers.de/images/thumbs/image_thumb.1606.png

Aufrufdatum: 02.08.2015

32

http://www.mathe-lexikon.at/media/advanced_pictures/wuerfel1.jpg

Aufrufdatum: 02.08.2015

33

<http://www.schulminator.com/sites/default/files/wiki/prisma-grundflaeche-koerper.png>

Aufrufdatum: 02.08.2015

34

[rechteckspyramide-quadratische-pyramide.png](#)

Aufrufdatum: 02.08.2015

35

<http://www.schulminator.com/sites/default/files/wiki/pyramide-grundflaeche-dreieckspyramide->

36

<http://www.schulminator.com/sites/default/files/wiki/pyramide-aufgabe-uebung-oberflaeche-mantel.png>

Aufrufdatum: 02.08.2015

37

http://www.mathematik-wissen.de/rechenregeln_und_rechengesetze.htm

Aufrufdatum: 09.07.2015 20:41